

Maynard の手法について

鈴木雄太 (立教大学)

2024 年 8 月 23 日 版 (執筆中)

概要

このノートでは Maynard の論文 [2] の内容を議論の詳細を補足しつつまとめます.

目次

B.1	導入	1
B.1.1	この資料で取り扱う結果	1
B.1.2	素数定理と Bombieri–Vinogradov の定理	3
B.1.3	設定・記法	4
B.1.4	改良版 GPY method	5
B.2	対角化	9
B.2.1	和 S_1 の対角化	10
B.2.2	和 $S_2^{(m)}$ の対角化	22
B.2.3	$y_{r_1, \dots, r_k}$ と $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ の間の関係式の導出	34
B.3	Smooth function による weight の設定	37
B.3.1	動機づけ	37
B.3.2	和 S_1 の主要項の計算	42
B.3.3	和 $S_2^{(m)}$ の主要項の計算	47

注：この資料では、主張に「ただしここで implicit constant は $a, b, \dots, c$ に依存する」等の宣言があるとき、対応する証明中の implicit constant も明記することなしに $a, b, \dots, c$ に依存するものとする.

B.1 導入

B.1.1 この資料で取り扱う結果

Definition B.1.1 (Admissible k -tuple). 自然数 k に対して, 相異なる k 個の非負整数の組

$$(h_1, \dots, h_k)$$

が **admissible k -tuple** であるとは, 任意の素数 p に対して

$$\{h_1 \pmod{p}, \dots, h_k \pmod{p}\} \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

となること, つまり, 剰余たち

$$h_1 \pmod{p}, \dots, h_k \pmod{p}$$

が $\pmod{p}$ の剰余すべてを渡らないことを言う.

Conjecture B.1.1 (Prime k -tuple conjecture). 任意の admissible k -tuple $(h_1, \dots, h_k)$ に対し,

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid n + h_1, \dots, n + h_k \text{ がすべて素数}\} = \infty.$$

Proposition B.1.1. 相異なる k 個の非負整数の組 $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_k)$ に対し,

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid n + h_1, \dots, n + h_k \text{ がすべて素数}\} = \infty \quad (\text{B.1.1})$$

であるならば, $\mathcal{H}$ は admissible でなければならない.

Proof. (B.1.1) が成立したとする. 任意に素数 p を取る. 示すべきは

$$\{h_1 \pmod{p}, \dots, h_k \pmod{p}\} \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (\text{B.1.2})$$

である. 仮定 (B.1.1) より, 自然数 $n > p$ であって

$$n + h_1, \dots, n + h_k$$

がすべて素数であるものが存在する. これら k 個の素数はすべて p より大きいので

$$p \nmid n + h_1, \dots, n + h_k$$

でなければならない. 特にここから

$$-n \pmod{p} \notin \{h_1 \pmod{p}, \dots, h_k \pmod{p}\}$$

だから (B.1.2) が成り立つ. □

本セミナーの目標は次の結果を示すことである:

Theorem B.1.1 (Maynard [2, Theorem 1.1]). 自然数 m に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+m} - p_n) \ll m^3 e^{4m}$$

が成立する.

B.1.2 素数定理と Bombieri–Vinogradov の定理

Theorem B.1.2. 実数 $x \geq 2$ に対して

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

が成立する.

Proof. 本セミナーでは証明しない. 例えば, Davenport の本 [1, Chapter 18] を参照のこと. $\square$

Definition B.1.2 (Euler totient 関数). Euler totient 関数と呼ばれる数論的関数 φ を

$$\varphi(n) := n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

で定める.

Definition B.1.3. 実数 $x \geq 0$, 整数 a, q であって $q \geq 1$ なるものに対して

$$\pi(x, a, q) := \#\{p \leq x \mid p : \text{素数}, p \equiv a \pmod{q}\}$$

とおく.

Definition B.1.4 (素数の level of distribution). 実数 $\theta > 0$ に対して,

「素数が level of distribution θ を持つ」

とは, 次の主張が成り立つことを言う: 任意の $A \geq 1$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x, a, q) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \ll x(\log x)^{-A} \quad (\text{B.1.3})$$

が

$$Q := x^{\theta-\varepsilon}$$

とともに成り立つ. ただしここで implicit constant は θ, A, ε に依存して良い.

Remark B.1.1. Maynard の論文 [2, §. 6-8, p. 384] と Definition B.1.4 は ε が含まれるか否かで定式化が多少異なることに注意. ここでは後の議論の単純化のために Definition B.1.4 のような定式化を用いた. (2 つの定式化はほぼ同値.)

Theorem B.1.3 (Bombieri-Vinogradov の定理). 素数は level of distribution $\frac{1}{2}$ を持つ.

Proof. 本セミナーでは証明しない. 例えば, Davenport の本 [1, Chapter 28] を参照のこと. □

B.1.3 設定・記法

以下, この資料では, 次の設定・記法を用いる:

- 素数すべてを小さい方から $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ と番号付ける.
- 自然数 $k \geq 2$.
- Admissible k -tuple $\mathcal{H} := (h_1, \dots, h_k)$.
- 素数の level of distribution $\theta \in (0, 1)$.
- 大きい実数 $N \geq N_0$.
- 実数 $R := N^{\frac{\theta}{2} - \delta}$. ただしここで $\delta \in (0, \frac{\theta}{2})$.
- 実数 $D_0 := \log \log \log N$ と自然数

$$W := \prod_{p \leq D_0} p. \quad (\text{B.1.4})$$

素数定理 (B.1.2) から, N が十分大のとき

$$W = \exp\left(\sum_{p \leq D_0} \log p\right) \leq \exp(\pi(D_0) \log D_0) \leq \exp(2D_0) = (\log \log N)^2 \quad (\text{B.1.5})$$

という評価を得ることが出来る. この W と次に導入する v_0 は計算を複雑にしてしまう小さい素因子 (特に D_0 以下の素因子) を議論に現れないように事前に除去する役割がある.

- 整数 v_0 であって

$$(v_0 + h_i, W) = 1 \quad (i = 1, \dots, k) \quad (\text{B.1.6})$$

であるもの. (存在性は $\mathcal{H}$ の admissibility に中国剰余定理を用いれば分かる.)

- 集合

$$\mathcal{R}_k := \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, \infty)^k \mid t_1 + \dots + t_k \leq 1\} \subseteq [0, 1]^k.$$

- 集合 $\mathcal{R}_k$ 上に台を持つ関数の集合たち

$$\mathcal{S}_k^{\mathbb{R}} := \{F : [0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R} \mid F(t) = 0 \ (t \notin \mathcal{R}_k), \ F \text{ は } [0, 1]^k \text{ 上で Riemann 可積分}\},$$

$$\mathcal{S}_k^1 := \{F : [0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R} \mid F(t) = 0 \ (t \notin \mathcal{R}_k), \ F \text{ は } [0, 1] \text{ 上で } C^1 \text{ 級}\}$$

(注: Maynard の論文 [2] では $\mathcal{S}_k := \mathcal{S}_k^{\mathbb{R}}$ のみしか導入していない.)

- 関数 $F \in \mathcal{S}_k^{\mathbb{R}}$ と $m \in \{1, \dots, k\}$ に対して, 積分

$$\begin{aligned} I_k(F) &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(t_1, \dots, t_k)^2 dt_1 \cdots dt_k, \\ J_k^{(m)}(F) &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_k) dt_m \right)^2 dt_1 \cdots \widehat{dt_m} \cdots dt_k. \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

ただしここで, $\widehat{\bullet}$ はその記号を取り除くことを意味する.

- 多変数の数論的関数 λ であって関数 $F \in \mathcal{S}_k^1$ に対して

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} := \left(\prod_{i=1}^k \mu(d_i) d_i \right) \sum_{\substack{d_i | r_i \ (\forall i) \\ (r_i, W)=1 \ (\forall i)}} \frac{\mu(\prod_{i=1}^k r_i)^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right) \quad (\text{B.1.8})$$

と定義されるもの.

B.1.4 改良版 GPY method

次の和を考える:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} w_n, \quad S_2^{(m)} := \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) w_n, \\ S_2 &:= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \left(\sum_{m=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \right) w_n = \sum_{m=1}^k S_2^{(m)}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.9})$$

ただしここで weight w_n は

$$w_n := \left(\sum_{d_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \right)^2 \geq 0 \quad (\text{B.1.10})$$

で与えられ, $\chi_{\mathbb{P}}: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ は素数の特性関数

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) := \mathbb{1}_{n \in \mathbb{P}} = \begin{cases} 1 & n \text{ が素数のとき,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である.

Proposition B.1.2 (Proposition 4.1 [2, p. 388]). 関数 $F \in \mathcal{S}_k^1$ に対して, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$S_1 = \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k (I_k(F) + o(1)),$$

$$S_2 = \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N(\log R)^k \left(\frac{\log R}{\log N} \right) \left(\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F) + o(1) \right)$$

が成立する.

Proposition B.1.3 (Proposition 4.2 [2, p. 389]). 実数 M_k と自然数 r_k を

$$M_k := \sup_{F \in \mathcal{S}_k^R} \frac{\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} > 0 \quad \text{および} \quad r_k := \left\lceil \frac{\theta M_k}{2} \right\rceil$$

で定める. このとき, 任意の admissible k -tuple $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_k)$ に対して

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid \#\{i \in \{1, \dots, k\} \mid n + h_i : \text{素数}\} \geq r_k\} = \infty$$

が成り立つ. 特に

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+r_k-1} - p_n) \leq \max_{1 \leq i, j \leq k} (h_i - h_j)$$

が得られる.

Proof. 任意に実数 $\tilde{M}, \tilde{\theta}$ であって

$$0 < \tilde{M} < M_k \quad \text{および} \quad 0 < \tilde{\theta} < \theta \tag{B.1.11}$$

なるものを取る. すると, M_k の定義から

$$\frac{\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(\tilde{F})}{I_k(\tilde{F})} > \tilde{M}$$

なる $\tilde{F} \in \mathcal{S}_k^R$ が取れる. さらに $\tilde{F}$ を近似することで

$$\frac{\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} > \tilde{M}$$

なる $F \in \mathcal{S}_k^1$ が取れる. Proposition B.1.2 をこの F と $R = N^{\frac{\tilde{\theta}}{2}}$ に対して用いる. ここで R を $R = N^{\frac{\tilde{\theta}}{2}}$ と取れるのは (B.1.11) から保証されていることに注意する. よって,

$$\rho := r_k - 1$$

とおけば, $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} S_1 - \rho S_2 &\geq \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N(\log R)^k \left(\frac{\log R}{\log N} \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F) - \rho I_k(F) + o(1) \right) \\ &\geq \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N(\log R)^k I_k(F) \left(\frac{\tilde{\theta} \tilde{M}}{2} - \rho + o(1) \right) \end{aligned}$$

を得る. ここで ρ の取り方から

$$\rho < \frac{\theta M_k}{2}$$

だから $\tilde{M}$ と $\tilde{\theta}$ を十分 M_k と θ に近くとれば

$$S_1 - \rho S_2 \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty)$$

を得る. ここで

$$S_1 - \rho S_2 = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \left(\sum_{m=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + h_i) - \rho \right) w_n$$

であり, weight w_n は非負値なので, ある $n \in [N, 2N)$ が存在して

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + h_i) - \rho > 0 &\iff \sum_{m=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + h_i) \geq r_k \\ &\iff \#\{i \in \{1, \dots, k\} \mid n + h_i : \text{素数}\} \geq r_k \end{aligned}$$

だということが分かる. N を大きくしていけば, いくらでも大きいこのような自然数 n が取れるので, このような自然数 n は無限に存在する. これで主張が示された. $\square$

Lemma B.1.1. 自然数 k に対して

$$\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_k) := (p_{\pi(k)+1}, \dots, p_{\pi(k)+k}) \quad (\text{B.1.12})$$

とおく. すると, $\mathcal{H}$ は admissible k -tuple である. またその幅は

$$\max_{1 \leq i, j \leq k} (h_i - h_j) = p_{\pi(k)+k} - p_{\pi(k)+1} \ll k \log k \quad (\text{B.1.13})$$

と評価できる. ただしここで implicit constant は絶対定数.

Proof. まず, $\mathcal{H}$ が admissible k -tuple であることを示す. 任意に素数 p を取る. 示すべきは

$$\{p_{\pi(k)+1} \pmod{p}, \dots, p_{\pi(k)+k} \pmod{p}\} \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (\text{B.1.14})$$

である. これを示すために, $p \leq k$ であるか $p > k$ であるかで場合分けをする.

まず, $p \leq k$ のときを考える. 素数

$$p_{\pi(k)}$$

は k 以下の最大の素数であるから,

$$p_{\pi(k)+1}, \dots, p_{\pi(k)+k}$$

はどれも k より大きい素数である. よって, p はこのいずれも割り切らず,

$$0 \pmod{p} \notin \{p_{\pi(k)+1} \pmod{p}, \dots, p_{\pi(k)+k} \pmod{p}\}$$

だから (B.1.14) が成り立つ.

次に $p > k$ のときを考える. このときは

$$\#\{p_{\pi(k)+1} \pmod{p}, \dots, p_{\pi(k)+k} \pmod{p}\} \leq k < p = \#(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

だから明らかに (B.1.14) が成り立つ.

以上で, (B.1.14) が示されたので, (B.1.12) で与えた $\mathcal{H}$ は admissible k -tuple である.

次に, $\mathcal{H}$ の幅の評価 (B.1.13) を示す. $k = 1$ のときは明らかなので $k \geq 2$ と仮定して良い. まず,

$$\max_{1 \leq i, j \leq k} (h_i - h_j) = p_{\pi(k)+k} - p_{\pi(k)+1} \leq p_{\pi(k)+k} \leq p_{2k}$$

であるが, 素数定理 (Theorem B.1.2) より

$$2k = \pi(p_{2k}) \gg \frac{p_{2k}}{\log p_{2k}} \quad (\text{B.1.15})$$

である. ここで (B.1.15) から

$$2k \gg \frac{p_{2k}}{\log p_{2k}} \gg p_{2k}^{\frac{1}{2}}$$

なので $\log p_{2k} \ll \log k$ であり, さらに (B.1.15) をもう一度使うことで

$$p_{2k} \ll k \log p_{2k} \ll k \log k$$

となる. よって, $\mathcal{H}$ の幅の評価 (B.1.13) も得られた. □

Proposition B.1.4 (Proposition 4.3-(3) [2, p. 390]). 十分大の自然数 k に対して

$$M_k > \log k - 2 \log \log k - 2$$

が成り立つ.

Proof of Theorem B.1.1. Proposition B.1.3 の最後の主張

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+r_k-1} - p_n) \leq \max_{1 \leq i, j \leq k} (h_i - h_j)$$

を用いる. したがって, $r_k > m$ となるような k を取りたい. まず, Bombieri–Vinogradov の定理 (Theorem B.1.3) より $\theta = \frac{1}{2}$ と取れる. よって, Proposition B.1.4 より, $k \geq k_0$ のとき

$$r_k = \left\lceil \frac{\theta M_k}{2} \right\rceil \geq \frac{\theta M_k}{2} > \frac{1}{4} (\log k - 2 \log \log k - 2) \quad (\text{B.1.16})$$

となるような自然数 k_0 がとれる. ここで, おおよそ ($\rightsquigarrow$ を「だいたい同値」程度の意味で使うと)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\log k - 2 \log \log k - 2) = m &\rightsquigarrow \log k - 2 \log \log k - 2 = 4m \\ &\rightsquigarrow \log k = 4m + 2 \log m + O(1) \\ &\rightsquigarrow k \asymp m^2 e^{4m} \end{aligned}$$

であることに気をつけて, 実数 $C \geq k_0$ を取り,

$$k := \lceil C m^2 e^{4m} \rceil \geq C m^2 e^{4m} \geq \max(k_0, e^e) \quad (\text{B.1.17})$$

程度で取ってみる．関数

$$[e^e, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; k \mapsto \frac{1}{4}(\log k - 2 \log \log k - 2)$$

は単調増加なので, (B.1.17) にあるように $k \geq Cm^2e^{4m}$ であることを用いれば (B.1.16) より

$$\begin{aligned} r_k &> \frac{1}{4}(\log(Cm^2e^{4m}) - 2 \log \log(Cm^2e^{4m}) - 2) \\ &= m + \frac{1}{4}(2 \log m + \log C - 2 \log \log(Cm^2e^{4m}) - 2) \end{aligned} \quad (\text{B.1.18})$$

を得る．実数 x に対して $x \leq e^x$ だから

$$\log \log(Cm^2e^{4m}) \leq \log \log(Ce^{6m}) = \log(6m + \log C) \leq \log m + \log(\log C + 6)$$

を得る．これを (B.1.18) に用いて

$$\begin{aligned} r_k &> m + \frac{1}{4}(2 \log m + \log C - 2(\log m + \log(\log C + 6)) - 2) \\ &= m + \frac{1}{4}(\log C - 2 \log(\log C + 6) - 2) \end{aligned}$$

となるので, C を十分大に取れば

$$r_k > m$$

を得る．あとは, (B.1.17) の下, admissible k -tuple を構成して, その幅

$$\max_{1 \leq i, j \leq k} (h_i - h_j)$$

を評価すれば良い．これには Lemma B.1.1 の構成法を用いれば, (B.1.17) の下,

$$k \leq 2Cm^2e^{4m} \quad \text{したがって} \quad k \leq e^{2C}e^{2m}e^{4m} \leq e^{(2C+6)m} \rightsquigarrow \log k \ll m$$

だから

$$\max_{1 \leq i, j \leq k} (h_i - h_j) \ll k \log k \ll m^3 e^{4m}$$

を得る．これで Theorem B.1.1 が示された. □

B.2 対角化

この節では, 一旦 $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ の定義 (B.1.8) を忘れて,

$$d := \prod_{i=1}^k d_i$$

と書いたとき, 次の台の条件を満たす実数列 $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ 一般を考える:

$$(\lambda 1) \quad d \geq R \implies \lambda_{d_1, \dots, d_k} = 0.$$

(λ2) $(d, W) > 1 \implies \lambda_{d_1, \dots, d_k} = 0$.

(λ3) d が square-free でない $\implies \lambda_{d_1, \dots, d_k} = 0$.

また,

$$\lambda_{\max} := \max_{d_1, \dots, d_k} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}| \quad (\text{B.2.1})$$

とおく. この設定の下, (B.1.9) で定義された和 $S_1, S_2^{(m)}$ の「対角化」を行う.

B.2.1 和 S_1 の対角化

以下, いくつか補題を用意するが, 先に Lemma B.2.6 の証明を追いつつ, 必要になれば戻って参照する方が良いかもしれない.

Lemma B.2.1. 十分大の $N \geq N_0(\mathcal{H})$ と自然数 $d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k$ に対して, もし

$$\begin{cases} n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] \mid n + h_i \ (\forall i) \end{cases} \quad (\text{B.2.2})$$

を満たす自然数 n が存在すれば, 自然数たち

$$W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k]$$

は 2 つずつ互いに素である.

Proof. 実際に (B.2.2) を満たす自然数 n が存在したと仮定する.

まず, 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して,

$$(W, [d_i, e_i]) = 1$$

を示す. これは, (B.2.2) と v_0 の取り方 (B.1.6) から

$$([d_i, e_i] \mid (W, n + h_i) = (W, v_0 + h_i) = 1$$

となることから従う.

次に残った場合, つまり, 任意の $i, j \in \{1, \dots, k\}$ であって $i \neq j$ であるものに対して,

$$([d_i, e_i], [d_j, e_j]) = 1$$

を示す. まず, (B.2.2) の 2 行目から

$$([d_i, e_i], [d_j, e_j]) \mid (n + h_i, n + h_j) \mid (n + h_i) - (n + h_j) = (h_i - h_j)$$

だから

$$([d_i, e_i], [d_j, e_j]) \mid h_i - h_j \rightsquigarrow ([d_i, e_i], [d_j, e_j]) \leq |h_i - h_j| = \max_{1 \leq i, j \leq k} |h_i - h_j|$$

が分かる. ここで, $D_0 = \log \log \log N$ を思い出せば, $N \geq N_0(\mathcal{H})$ のとき

$$([d_i, e_i], [d_j, e_j]) \leq \max_{1 \leq i, j \leq k} |h_i - h_j| \leq D_0$$

となる. よって, $([d_i, e_i], [d_j, e_j])$ が素因子 p を持つとすると $p \leq D_0$ が分かるが, これはすでに先の段落で示した $(W, [d_i, e_i]) = (W, [d_j, e_j]) = 1$ と矛盾する. したがって, $([d_i, e_i], [d_j, e_j]) = 1$ とならなければならない. 以上で主張が示された. $\square$

Lemma B.2.2. 自然数 $W, d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k$ に対して, 次は同値:

- (i) 自然数たち $W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k]$ は 2 つずつ互いに素.
- (ii) 次の 4 条件が成立する:
 - (A) 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して d_i および e_j はどちらも W と互いに素.
 - (B) 任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して d_i と d_j は互いに素.
 - (C) 任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して e_i と e_j は互いに素.
 - (D) 任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して, d_i と e_j は互いに素.

Proof.

(i) $\implies$ (ii). これは $d_i, e_j \mid [d_i, e_j]$ から明らか.

(ii) $\implies$ (i). (ii) が成立したとする. 一般に自然数 n, a, b に対して

$$(n, a) = 1 \text{ かつ } (n, b) = 1 \rightsquigarrow (n, [a, b]) = 1$$

であることを用いる. まず, (A) から, 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して

$$(W, d_i) = 1 \text{ かつ } (W, e_i) = 1 \rightsquigarrow (W, [d_i, e_i]) = 1$$

が分かる. あとは, 任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して

$$([d_i, e_i], [d_j, e_j]) = 1$$

を示せば良い. 任意に相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ を取る. (B) と (D) から

$$(d_i, d_j) = 1 \text{ かつ } (d_i, e_j) = 1 \rightsquigarrow (d_i, [d_j, e_j]) = 1 \tag{B.2.3}$$

が分かる. 同様に, (C) と (D) から

$$(e_i, d_j) = 1 \text{ かつ } (e_i, e_j) = 1 \rightsquigarrow (e_i, [d_j, e_j]) = 1 \tag{B.2.4}$$

も分かる. これら (B.2.3) と (B.2.4) を合わせて

$$(d_i, [d_j, e_j]) = 1 \text{ かつ } (e_i, [d_j, e_j]) = 1 \rightsquigarrow ([d_i, e_i], [d_j, e_j]) = 1$$

が分かった. よって, (i) が成立する. $\square$

Lemma B.2.3. 自然数

$$d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_k \quad \text{と} \quad s_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \dots, k\} : \text{相異なる})$$

を考える. さらに

$$u_i \mid d_i, e_i \quad (\forall i) \quad \text{かつ} \quad s_{i,j} \mid d_i, e_j \quad (\forall i \neq j) \quad (\text{B.2.5})$$

が成り立つと仮定する. このとき, もし 4 条件

(A) 任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して $(u_i, s_{i,j}) = 1$.

(B) 任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して $(u_j, s_{i,j}) = 1$.

(C) 任意の相異なる $i, a, b \in \{1, \dots, k\}$ に対して $(s_{i,a}, s_{i,b}) = 1$.

(D) 任意の相異なる $j, a, b \in \{1, \dots, k\}$ に対して $(s_{a,j}, s_{b,j}) = 1$.

のどれかが成り立たなければ

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} = 0 \quad (\text{B.2.6})$$

である.

Proof.

(A) が成り立たないとき. 相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ であって, $(u_i, s_{i,j}) > 1$ であるものがあつたと仮定する. すると, (B.2.5) より

$$u_i \mid e_i \quad \text{かつ} \quad s_{i,j} \mid e_j \rightsquigarrow 1 < (u_i, s_{i,j}) \mid (e_i, e_j) \rightsquigarrow (e_i, e_j) > 1$$

となり, $(\lambda 3)$ より $\lambda_{e_1, \dots, e_k} = 0$ となるので, (B.2.6) を得る.

(B) が成り立たないとき. 相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ であって, $(u_j, s_{i,j}) > 1$ であるものがあつたと仮定する. すると, (B.2.5) より

$$u_j \mid d_j \quad \text{かつ} \quad s_{i,j} \mid d_i \rightsquigarrow 1 < (u_j, s_{i,j}) \mid (d_i, d_j) \rightsquigarrow (d_i, d_j) > 1$$

となり, $(\lambda 3)$ より $\lambda_{d_1, \dots, d_k} = 0$ となるので, (B.2.6) を得る.

(C) が成り立たないとき. 相異なる $i, a, b \in \{1, \dots, k\}$ であって, $(s_{i,a}, s_{i,b}) > 1$ であるものがあつたと仮定する. すると, (B.2.5) より

$$s_{i,a} \mid e_a \quad \text{かつ} \quad s_{i,b} \mid e_b \rightsquigarrow 1 < (s_{i,a}, s_{i,b}) \mid (e_a, e_b) \rightsquigarrow (e_a, e_b) > 1$$

となり, $(\lambda 3)$ より $\lambda_{e_1, \dots, e_k} = 0$ となるので, (B.2.6) を得る.

(D) が成り立たないとき. 相異なる $j, a, b \in \{1, \dots, k\}$ であって, $(s_{a,j}, s_{b,j}) > 1$ であるものがあつたと仮定する. すると, (B.2.5) より

$$s_{a,j} \mid d_a \quad \text{かつ} \quad s_{b,j} \mid d_b \rightsquigarrow 1 < (s_{a,j}, s_{b,j}) \mid (d_a, d_b) \rightsquigarrow (d_a, d_b) > 1$$

となり, $(\lambda 3)$ より $\lambda_{d_1, \dots, d_k} = 0$ となるので, (B.2.6) を得る. □

Lemma B.2.4. 実数 $x \geq 2$ と自然数 $Q \leq x$ に対して,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, Q)=1}} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \ll \frac{\varphi(Q)}{Q} \log x \quad (\text{B.2.7})$$

が成り立つ. また, 実数 $x \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \geq x} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)^2} \ll \frac{1}{x}$$

が成り立つ. ここで implicit constant たちは絶対定数である.

Proof. Corollary A.8.1 を

$$\begin{aligned} f_1(n) &:= \frac{\mu(n)^2 n}{\varphi(n)} \rightsquigarrow \frac{f_1(n)}{n} = \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)}, \\ f_2(n) &:= \frac{\mu(n)^2 n^2}{\varphi(n)^2} \rightsquigarrow \frac{f_2(n)}{n^2} = \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)^2} \end{aligned}$$

とともに用いる. すると,

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \frac{\mu(p)^2 p}{\varphi(p)} = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right), \\ f_2(p) &= \frac{\mu(p)^2 p^2}{\varphi(p)^2} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 = 1 + \frac{2}{p-1} + \left(\frac{1}{p-1}\right)^2 = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

であるから f_1, f_2 ともに $\kappa = 1$ と取れて

$$\prod_{p|Q} \left(1 + \frac{f_1(p)}{p}\right)^{-1} = \prod_{p|Q} \left(\frac{p-1}{p}\right) = \frac{\varphi(Q)}{Q}$$

に注意すれば主張を得る. □

Lemma B.2.5. 実数列 $(y_{r_1, \dots, r_k})_{r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}}$ を

$$y_{r_1, \dots, r_k} := \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) \varphi(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ r_i | d_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k d_i}$$

で定め,

$$y_{\max} := \max_{r_1, \dots, r_k} |y_{r_1, \dots, r_k}|$$

とおく. すると, 以下が成立する:

(i) 自然数 $r_1, \dots, r_k$ に対して

$$r := \prod_{i=1}^k r_i$$

と書いたとき, $y_{r_1, \dots, r_k}$ の台について以下が成り立つ:

$$(y1) \quad r \geq R \implies y_{r_1, \dots, r_k} = 0.$$

$$(y2) \quad (r, W) > 1 \implies \lambda_{r_1, \dots, r_k} = 0.$$

$$(y3) \quad r \text{ が square-free でない} \implies y_{r_1, \dots, r_k} = 0.$$

(ii) 任意の自然数 $d_1, \dots, d_k$ に対して, 変換公式

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} = \left(\prod_{i=1}^k \mu(d_i) d_i \right) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ d_i | r_i \ (\forall i)}} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} \quad (\text{B.2.8})$$

が成り立つ. また, $(y1)$, $(y2)$, $(y3)$ を満たす任意の実数列 $(y_{r_1, \dots, r_k})$ に対して, (B.2.8) で定義された実数列 $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ は $(\lambda1)$, $(\lambda2)$, $(\lambda3)$ を満たす.

(iii) (B.2.1) で定義された $\lambda_{\max}$ に対して, $y_{\max}$ による評価

$$\lambda_{\max} \leq y_{\max} (\log R)^k$$

が成立する.

Proof.

(i). これは $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ の台の条件 $(\lambda1)$, $(\lambda2)$, $(\lambda3)$ から直ちに従う.

(ii). Möbius 反転公式 (Lemma A.3.3) を

$$\Lambda(d_1, \dots, d_k) := \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k d_i} \quad \text{および} \quad Y(r_1, \dots, r_k) := \frac{y_{r_1, \dots, r_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)}$$

とともに用いれば (Lemma A.3.3 の条件 (2) は先に示した $(y1)$ から従う), 所望の変換公式を得る. 最後の (B.2.8) で定義された実数列 $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ が $(\lambda1)$, $(\lambda2)$, $(\lambda3)$ を満たすことは (i) と同様に直ちに分かる.

(iii). 先に示した変換公式 (ii) を用いれば,

$$\lambda_{\max} \leq y_{\max} \max_{d_1, \dots, d_k: \text{square-free}} \prod_{i=1}^k \left(d_i \sum_{\substack{r_i < R \\ d_i | r_i}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right)$$

を得る. ただしここで先に示した $(y1)$ と $(y2)$ を用いた. さらに自然数 m, n に対して

$$\varphi(mn) = mn \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \geq m \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p} \right) n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \varphi(m) \varphi(n)$$

だから和を $r_i \rightsquigarrow d_i r_i$ と変数変換して

$$\lambda_{\max} \leq y_{\max} \max_{d_1, \dots, d_k: \text{square-free}} \prod_{i=1}^k \left(\frac{d_i}{\varphi(d_i)} \sum_{\substack{r_i < R/d_i \\ (r_i, d_i)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right) \quad (\text{B.2.9})$$

とできる. この右辺の各因子を評価する. まず, 平方無縁数 d に対して

$$\frac{d}{\varphi(d)} = \prod_{p|d} \left(\frac{p}{p-1} \right) = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p-1} \right) = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\mu(p)^2}{\varphi(p)} \right) = \sum_{e|d} \frac{\mu(e)^2}{\varphi(e)}$$

だから

$$\frac{d_i}{\varphi(d_i)} \sum_{\substack{r_i < R/d_i \\ (r_i, d_i)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} = \sum_{e|d_i} \frac{\mu(e)^2}{\varphi(e)} \sum_{\substack{r_i < R/d_i \\ (r_i, d_i)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)}$$

とできる. ここで, 右辺の和の範囲を e の値に応じて緩めることで

$$\frac{d_i}{\varphi(d_i)} \sum_{\substack{r_i < R/d_i \\ (r_i, d_i)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \leq \sum_{e|d_i} \frac{\mu(e)^2}{\varphi(e)} \sum_{\substack{r_i < R/e \\ (r_i, d_i/e)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} = \sum_{e|d_i} \sum_{\substack{er_i < R \\ (er_i, d_i)=e}} \frac{\mu(er_i)^2}{\varphi(er_i)} = \sum_{e|d_i} \sum_{\substack{r < R \\ (r, d_i)=e}} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)}$$

とできる. この最右辺の 2 重和は自然数 $r < R$ を (r, d_i) の値で分類した形になっているので

$$\frac{d_i}{\varphi(d_i)} \sum_{\substack{r_i < R/d_i \\ (r_i, d_i)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \leq \sum_{r < R} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)}$$

である. 最後に Lemma B.2.4 の (B.2.7) を $x := R$, $Q := 1$ とともに用いれば

$$\frac{d_i}{\varphi(d_i)} \sum_{\substack{r_i < R/d_i \\ (r_i, d_i)=1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \ll \log R$$

を得る. この評価を (B.2.9) に用いれば主張を得る. (Maynard とは少し違う証明を紹介しましたが, セミナー時は好きな方を使ってください.) $\square$

Lemma B.2.6 (Lemma 5.1 [2, p. 392]). 十分大の $N \geq N_0(\mathcal{H}, \delta)$ に対して, 漸近式

$$S_1 = \frac{N}{W} \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} + O\left(\frac{1}{D_0} \frac{y_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \right)$$

が成立する. ただしここで, 実数列 $(y_{r_1, \dots, r_k})_{r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}}$ は

$$y_{r_1, \dots, r_k} := \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) \varphi(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ r_i | d_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k d_i} \quad (\text{B.2.10})$$

で与えられ, $y_{\max}$ は

$$y_{\max} := \max_{r_1, \dots, r_k} |y_{r_1, \dots, r_k}|$$

で定義され, implicit constant は $\mathcal{H}, \delta$ のみに依存する.

Proof. まず, 和 S_1 の定義 (B.1.9) に重み w の定義 (B.1.10) を代入して

$$S_1 = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \left(\sum_{d_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \right)^2$$

を得る. この内側の 2 乗を開くと

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \sum_{d_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \sum_{e_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \\ &= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_i, e_i | n + h_i \ (\forall i)}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \end{aligned}$$

となる. さらに

$$d_i, e_i \mid n + h_i \iff [d_i, e_i] \mid n + h_i$$

に注意した後に (ここで $[d_i, e_i]$ は d_i, e_i の最小公倍数), 和を交換して

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \\ &= \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} 1 \end{aligned}$$

を得る. ここで, Lemma B.2.1 を用いれば, 外側の和に

$$W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k] \text{ は 2 つずつ互いに素である} \quad (\text{B.2.11})$$

という条件を課しても最右辺は変わらないことが分かる. そこで

$$\sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}}$$

という和で (B.2.11) という条件付きの自然数 $d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k$ に渡る和を表すことにすれば

$$S_1 = \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} 1 \quad (\text{B.2.12})$$

を得る. この内側の和の条件は連立合同方程式

$$\begin{cases} n \equiv v_0 \pmod{W} \\ n \equiv -h_1 \pmod{[d_1, e_1]} \\ \vdots \\ n \equiv -h_k \pmod{[d_k, e_k]} \end{cases} \quad (\text{B.2.13})$$

に書き直すことができるから、外側の和の条件 (B.2.11) から中国剰余定理が使えて、(B.2.13) は

$$n \equiv a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]}$$

と、ある $a = a(v_0, \mathcal{H}, W, d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{Z}$ を使って書き直せる。よって、(B.2.12) にて

$$\sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} 1 = \frac{N}{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} + O(1)$$

とできるので、(B.2.12) から

$$S_1 = \frac{N}{W} \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} + O\left(\sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} |\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}|\right) =: M_1 + E_1 \quad (\text{B.2.14})$$

を得る。後は主要項 M_1 と誤差項 E_1 を計算すればよい。

まず、誤差項 E_1 を評価する。和の条件 (B.2.11) は忘れてしまえば

$$E_1 \ll \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} |\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}| = \left(\sum_{d_1, \dots, d_k} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}| \right)^2 \quad (\text{B.2.15})$$

となる。ここで $d := \prod_{i=1}^k d_i$ の値で項の場合分けをすると、 $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ の台の条件 $(\lambda 1)$, $(\lambda 3)$ から

$$\sum_{d_1, \dots, d_k} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}| = \sum_{d < R} \mu(d)^2 \sum_{d_1 \cdots d_k = d} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}|$$

を得る。さらに

$$\lambda_{\max} := \max_{d_1, \dots, d_k} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}| \quad (\text{B.2.16})$$

とおけば

$$\sum_{d_1, \dots, d_k} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}| \ll \lambda_{\max} \sum_{d < R} \mu(d)^2 \sum_{d_1 \cdots d_k = d} 1 = \lambda_{\max} \sum_{d < R} \mu(d)^2 \tau_k(d)$$

となる。ここで、

$$\mu(p)^2 \tau_k(p) = k$$

なので、Corollary A.8.1 を $\kappa := k$, $A := 1$ として使えば

$$\sum_{d_1, \dots, d_k} |\lambda_{d_1, \dots, d_k}| \ll \lambda_{\max} R (\log R)^k$$

を得る（実際は $\log R$ のべきは $k-1$ にできる）。これを (B.2.15) に代入して

$$E_1 \ll \lambda_{\max}^2 R^2 (\log R)^{2k} \quad (\text{B.2.17})$$

という評価が得られた。

次に主要項

$$M_1 = \frac{N}{W} \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} \quad (\text{B.2.18})$$

について考える. まず, Lemma A.3.2 より, この和の中では

$$\frac{1}{[d_i, e_i]} = \frac{1}{d_i e_i} (d_i, e_i) \quad (\text{B.2.19})$$

である. (B.2.18) の右辺にある $\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}$ に対して台の条件 (λ3) を思い出せば, (B.2.18) の右辺で d_i, e_i は平方無縁なものに制限しても良い. すると, (d_i, e_i) も平方無縁だから, (B.2.19) はさらに

$$\frac{1}{[d_i, e_i]} = \frac{1}{d_i e_i} \prod_{p|(d_i, e_i)} p = \frac{1}{d_i e_i} \prod_{p|(d_i, e_i)} (1 + \varphi(p))$$

と書き直せる. ただしここで φ は Euler totient 関数

$$\varphi(n) := n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

である. 最後の積を展開すれば, (d_i, e_i) が平方無縁なことに注意して

$$\frac{1}{[d_i, e_i]} = \frac{1}{d_i e_i} \sum_{u_i | (d_i, e_i)} \varphi(u_i) = \frac{1}{d_i e_i} \sum_{u_i | d_i, e_i} \varphi(u_i)$$

を得る. (この変形では d_i, e_i が平方無縁であることを使う必要はないが, ここでは簡単のために d_i, e_i が平方無縁であることを用いて計算した.) この等式を $i = 1, \dots, k$ に渡って掛け合わせると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \prod_{i=1}^k \sum_{u_i | d_i, e_i} \varphi(u_i) \\ &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \end{aligned}$$

となる. これを (B.2.18) に代入すれば

$$M_1 = \frac{N}{W} \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right)$$

を得る. さらに和を交換すれば

$$M_1 = \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \quad (\text{B.2.20})$$

を得る. 次に和 $\sum'$ の条件 (B.2.11) を除去したい. まず, Lemma B.2.2 を用いて条件 (B.2.11) を言い換える. すると, (B.2.20) の右辺の和にて $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ と $\lambda_{e_1, \dots, e_k}$ の台の条件 (λ2) と (λ3) を思い出

せば, Lemma B.2.2 の条件 (A), (B), (C) は和の条件として課さなくてもよいことが分かる. よって, 取り除くべき条件は Lemma B.2.2 の (D), つまり条件

任意の相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して, d_i と e_j は互いに素

である. この条件を消すには Lemma A.2.2 を用いて

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(d_i, e_j)=1 \ (\forall i \neq \forall j)} &= \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{1}_{(d_i, e_j)=1} \\ &= \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \sum_{s_{i,j} | (d_i, e_j)} \mu(s_{i,j}) = \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ s_{i,j} | (d_i, e_j) \ (\forall i \neq \forall j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.21})$$

という特性関数を挿入すればよい. ただしここで最右辺の和は

$$(s_{i,j})_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}}$$

という自然数の組に渡る. よって, (B.2.20) に (B.2.21) を挿入し

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ s_{i,j} | (d_i, e_j) \ (\forall i \neq \forall j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \\ &= \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i) \\ s_{i,j} | d_i, e_j \ (\forall i \neq \forall j)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.22})$$

この和の中では, Lemma B.2.3 より, 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して

$$u_i, s_{i,1}, \dots, \overset{\text{トル}}{\hat{s}_{i,i}}, \dots, s_{i,k} \quad (\text{B.2.23})$$

は 2 つずつ互いに素であると思って良い. 同様に, 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して

$$u_i, s_{1,i}, \dots, \overset{\text{トル}}{\hat{s}_{i,i}}, \dots, s_{k,i} \quad (\text{B.2.24})$$

も 2 つずつ互いに素であると思って良い. したがって,

$$a_i := u_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} s_{i,j} \quad \text{および} \quad b_i := u_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} s_{j,i} \quad (\text{B.2.25})$$

とおけば, $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ は平方無縁であり

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i | d_i, e_i \ (\forall i) \\ s_{i,j} | d_i, e_j \ (\forall i \neq \forall j) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_i | d_i \ (\forall i) \\ b_i | e_i \ (\forall i) \end{array} \right\}$$

が分かる. よって, 条件 (B.2.23), (B.2.24) は $\mu(a_i), \mu(b_i)$ の台の条件から従うので, (B.2.22) から

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i) \\ s_{i,j} | d_i, e_j \ (\forall i \neq j)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i) (\prod_{i=1}^k e_i)} \\ &= \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \left(\sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ a_i | d_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k d_i} \right) \left(\sum_{\substack{e_1, \dots, e_k \\ b_i | e_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{e_1, \dots, e_k}}{\prod_{i=1}^k e_i} \right) \end{aligned}$$

と書き直せる. さらに, $y_{r_1, \dots, r_k}$ の定義 (B.2.10) を用いれば

$$M_1 = \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i) \mu(b_i)}{\varphi(a_i) \varphi(b_i)} \right) y_{a_1, \dots, a_k} y_{b_1, \dots, b_k} \quad (\text{B.2.26})$$

と書き直せる. (実数列 $y_{r_1, \dots, r_k}$ はこのようにして現れる.)

(B.2.26) の右辺の和の中で, ある i, j に対して $s_{ij} > 1$ になってしまう項たちの寄与

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_1 &:= \frac{N}{W} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ s_{i,j} > 1 \ (\exists i \neq j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i) \mu(b_i)}{\varphi(a_i) \varphi(b_i)} \right) y_{a_1, \dots, a_k} y_{b_1, \dots, b_k} \end{aligned}$$

を誤差項として評価しよう. (B.2.26) の右辺の和では, (y_2) と $s_{ij} | a_i, b_j$ から $(s_{i,j}, W) = 1$ という条件を課しても良いことを思い出す. すると, W は D_0 以下の素数をすべてかけたものだったので

$$s_{i,j} > 1 \text{ かつ } (s_{i,j}, W) = 1 \implies s_{i,j} > D_0$$

であることに注意する. さらに $(y_1), (y_2)$ から (B.2.26) の右辺の和では

$$u_1, \dots, u_k < R \text{ かつ } (u_i, W) = 1 \ (\forall i)$$

と制限できるので

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_1 &\ll \frac{y_{\max}^2}{W} N \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k < R \\ (u, W) = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ (s_{i,j}, W) = 1 \ (\forall i \neq j) \\ s_{i,j} > D_0 \ (\exists i \neq j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j})^2 \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{\varphi(a_i) \varphi(b_i)} \right) \end{aligned}$$

を得る. さらに和の条件 $s_{i,j} > D_0$ を達成する $(i, j) = (i_0, j_0)$ に応じて分解することで

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_1 &\ll \frac{y_{\max}^2}{W} N \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k < R \\ (u, W)=1}} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ (s_{i,j}, W)=1 \ (\forall i \neq j) \\ s_{i_0, j_0} > D_0}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j})^2 \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{\varphi(a_i) \varphi(b_i)} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.27})$$

とできる. さらに a_i, b_i の定義 (B.2.25) を思い出せば

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{\varphi(a_i) \varphi(b_i)} &\leq \prod_{1 \leq i \leq k} \left(\frac{\mu(u_i)^2 \mu(u_i)^2}{\varphi(u_i) \varphi(u_i)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})^2 \mu(s_{j,i})^2}{\varphi(s_{i,j}) \varphi(s_{j,i})} \right) \\ &= \left(\prod_{1 \leq i \leq k} \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)^2} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{j,i})^2}{\varphi(s_{j,i})} \right) \end{aligned}$$

となるが, 最右辺の第 3 因子は $(i, j) \rightsquigarrow (j, i)$ と変数変換すれば第 2 因子と等しくなるから

$$\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{\varphi(a_i) \varphi(b_i)} \leq \left(\prod_{1 \leq i \leq k} \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)^2} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2} \right)$$

を得る. これを (B.2.27) に代入して

$$\widetilde{M}_1 \ll \frac{y_{\max}^2}{W} N \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k < R \\ (u, W)=1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)} \right) \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ (s_{i,j}, W)=1 \ (\forall i \neq j) \\ s_{i_0, j_0} > D_0}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2} \right)$$

とできる. ここで, (i_0, j_0) の取りうる値の個数は $k(k-1) \ll 1$ 通りなので,

$$\widetilde{M}_1 \ll \frac{y_{\max}^2}{W} N \left(\sum_{\substack{u < R \\ (u, W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)} \right)^k \left(\sum_{\substack{s > D_0 \\ (s, W)=1}} \frac{\mu(s)^2}{\varphi(s)^2} \right) \left(\sum_{\substack{s \geq 1 \\ (s, W)=1}} \frac{\mu(s)^2}{\varphi(s)^2} \right)^{k(k-1)-1}$$

を得る. 右辺の和に Lemma B.2.4 を用いれば,

$$\widetilde{M}_1 \ll \frac{1}{D_0} \frac{y_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \quad (\text{B.2.28})$$

を得る. よって, (B.2.26) と $\widetilde{M}_1$ の定義 (B.2.28) を思い出せば, すべての相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して $s_{i,j} = 1$ のとき $a_i = b_i = u_i$ だから和を取る変数を $u_i \rightsquigarrow r_i$ と書き換えて

$$M_1 = \frac{N}{W} \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} + O \left(\frac{1}{D_0} \frac{y_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \right) \quad (\text{B.2.29})$$

を得る.

最後に以上の評価を組み合わせよう. まず, E_1 の評価 (B.2.17) に Lemma B.2.5 の (iii) を用いれば

$$E_1 \ll y_{\max}^2 R^2 (\log R)^{4k}$$

となる. ここで $D_0 := \log \log \log D$ と W の評価 (B.1.5) を思い出せば, 十分大の $N \geq N(k, \delta)$ で

$$\frac{1}{D_0} \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k \geq \frac{1}{D_0 W^{k+1}} \geq (\log \log N)^{-(2k+3)} \geq \frac{(\log R)^{3k}}{N^{2\delta}}$$

となるので, $R := N^{\frac{\theta}{2}-\delta} \leq N^{\frac{1}{2}-\delta}$ を思い出せば, E_1 はさらに

$$E_1 \ll y_{\max}^2 R^2 (\log R)^{4k} \leq y_{\max}^2 N (\log R)^k \cdot \frac{(\log R)^{3k}}{N^{2\delta}} \leq \frac{1}{D_0} \frac{y_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k$$

と評価される. この評価と (B.2.29) を最初の分解 (B.2.14) に代入して主張を得る. $\square$

B.2.2 和 $S_2^{(m)}$ の対角化

Lemma B.2.7. 完全乗法的関数 g を素数 p に対して

$$g(p) := p - 2$$

で定める. このとき, 実数 $x \geq 2$ と偶数 $Q \leq x$ に対して,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, Q)=1}} \frac{\mu(n)^2}{g(n)} \ll \frac{\varphi(Q)}{Q} \log x$$

が成り立つ. また, 実数 $x \geq 2$ に対して

$$\sum_{\substack{n \geq x \\ n: \text{odd}}} \frac{\mu(n)^2}{g(n)^2} \ll \frac{1}{x} \quad (\text{B.2.30})$$

が成り立つ. ここで implicit constant たちは絶対定数である.

Proof. Corollary A.8.1 を

$$\begin{aligned} f_1(n) &:= \frac{\mu(n)^2 n}{g(n)} \mathbb{1}_{n: \text{odd}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{f_1(n)}{n} = \frac{\mu(n)^2}{g(n)} \mathbb{1}_{n: \text{odd}}, \\ f_2(n) &:= \frac{\mu(n)^2 n^2}{g(n)^2} \mathbb{1}_{n: \text{odd}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{f_2(n)}{n^2} = \frac{\mu(n)^2}{g(n)^2} \mathbb{1}_{n: \text{odd}} \end{aligned}$$

とともに用いる. (Q が偶数であることに気をつける.) すると, 奇素数 p に対して

$$f_1(p) = \frac{\mu(p)^2 p}{g(p)} = \frac{p}{p-2} = 1 + \frac{2}{p-2} = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$f_2(p) = \frac{\mu(p)^2 p^2}{g(p)^2} = \left(\frac{p}{p-2} \right)^2 = 1 + \frac{4}{p-2} + \left(\frac{2}{p-1} \right)^2 = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

であるから f_1, f_2 ともに $\kappa = 1$ と取れて

$$\prod_{p|Q} \left(1 + \frac{f_1(p)}{p} \right)^{-1} = \prod_{\substack{p|Q \\ p>2}} \left(\frac{p-2}{p-1} \right) \leq \prod_{\substack{p|Q \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p} \right) = 2^{\frac{\varphi(Q)}{Q}}$$

に注意すれば主張を得る. □

Lemma B.2.8 (Lemma 5.2 [2, p. 395]). 実数 $A > 0$ と十分大の $N \geq N_0(\mathcal{H}, \delta)$ に対して,

$$S_2^{(m)} = \frac{N}{\varphi(W) \log N} \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} + O\left(\frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} N (\log R)^{k-2} + y_{\max}^2 N (\log N)^{-A} \right)$$

が成立する. ただしここで, 完全乗法的関数 g は素数 p に対して

$$g(p) := p - 2$$

で与えられ, 実数列 $(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})_{r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}}$ は

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} := \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ r_i | d_i \ (\forall i) \\ d_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)} \quad (\text{B.2.31})$$

で与えられ, $y_{\max}$ は Lemma B.2.6 と同じように与えられ, $y_{\max}^{(m)}$ は

$$y_{\max}^{(m)} := \max_{r_1, \dots, r_k} |y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}|$$

で定義され, implicit constant は $\mathcal{H}, \delta$ と (B.1.3) の implicit constant のみに依存する.

Remark B.2.1. 実数列 $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ の台の条件 $(\lambda 1), (\lambda 2), (\lambda 3)$ から,

$$r := \prod_{i=1}^k r_i$$

と書いたとき, (B.2.31) で定義された実数列 $(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})$ に対しても

$$(ym1) \ r \geq R \implies y_{r_1, \dots, r_k} = 0.$$

$$(ym2) \ (r, W) > 1 \implies \lambda_{r_1, \dots, r_k} = 0.$$

$$(ym3) \ r \text{ が square-free でない} \implies y_{r_1, \dots, r_k} = 0.$$

という台の条件が成り立つ. また, (B.2.31) の右辺の和の $r_m | d_m$ と $d_m = 1$ という条件から

(ym4) $r_m > 1 \implies y_{r_1, \dots, r_k} = 0$.
 であることにも注意する.

Proof of Lemma B.2.8. この証明は素数の level of distribution を用いることと, $n + h_m$ が素数に制限されていることに気をつけることを除き, Lemma B.2.6 の証明とパラレルな議論を用いる. まず, $S_2^{(m)}$ の定義 (B.1.9) に重み w の定義 (B.1.10) を代入して

$$S_2^{(m)} = \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \left(\sum_{d_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \right)^2$$

を得る. この内側の 2 乗を開くと

$$\begin{aligned} S_2^{(m)} &= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \sum_{d_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \sum_{e_i | n + h_i \ (\forall i)} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \\ &= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_i, e_i | n + h_i \ (\forall i)}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \end{aligned}$$

となる. さらに

$$d_i, e_i \mid n + h_i \iff [d_i, e_i] \mid n + h_i$$

に注意した後に (ここで $[d_i, e_i]$ は d_i, e_i の最小公倍数), 和を交換して

$$\begin{aligned} S_2^{(m)} &= \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W}}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \\ &= \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \end{aligned}$$

を得る. ここで, Lemma B.2.1 を用いれば, 外側の和に

$$W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k] \text{ は 2 つずつ互いに素である} \quad (\text{B.2.32})$$

という条件を課しても最右辺は変わらないことが分かる. そこで

$$\sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}}$$

という和で (B.2.32) という条件付きの自然数 $d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k$ に渡る和を表すことにすれば

$$S_2^{(m)} = \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \quad (\text{B.2.33})$$

を得る．この内側の和の条件は連立合同方程式

$$\begin{cases} n \equiv v_0 \pmod{W} \\ n \equiv -h_1 \pmod{[d_1, e_1]} \\ \vdots \\ n \equiv -h_k \pmod{[d_k, e_k]} \end{cases} \quad (\text{B.2.34})$$

に書き直すことができるから，外側の和の条件 (B.2.32) から中国剰余定理が使えて，(B.2.34) は

$$n \equiv a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]}$$

と，ある $a = a(v_0, \mathcal{H}, W, d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{Z}$ を使って書き直せる．ここで， $(a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) = 1$ でないとき，(B.2.33) の内側

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod{W} \\ [d_i, e_i] | n + h_i \ (\forall i)}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) = \lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} \\ n + h_m : \text{prime}}} 1$$

が

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} \\ n + h_m : \text{prime}}} 1 = 0 \quad (\text{B.2.35})$$

を満たすことを示す．実際に $(a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) = 1$ でないとする．背理法を用いる．もし $\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} = 0$ ないしは (B.2.35) の左辺の和が空和ならば (B.2.35) が明らかに成立するので， $\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \neq 0$ であり，(B.2.35) の左辺の和の条件を満たす n が存在する場合を考えて矛盾を示せば良い．すると，(B.2.35) の左辺の和の条件を満たす n に対しては， $n + h_m$ が素数なので

$$\begin{aligned} n \equiv a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} &\rightsquigarrow n + h_m \equiv a + h_m \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} \\ &\rightsquigarrow 1 < (a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) \mid n + h_m \\ &\rightsquigarrow n + h_m = (a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) \end{aligned}$$

が分かる．つまり， $n + h_m$ は $W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$ の素因子になる．このとき，(B.2.34) と v_0 の選び方から

$$(n + h_m, W) = (v_0 + h_m, W) = 1$$

だから $n + h_m$ は $\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$ の素因子になる．ここで，仮定 $\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k} \neq 0$ と $(\lambda 1)$ より

$$\left(\prod_{i=1}^k d_i \right) \left(\prod_{i=1}^k e_i \right) \leq R^2 = N^{\theta - 2\delta} < N$$

となる．したがって、 $n + h_m$ が $\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$ の素因子であることを用いると、

$$N \leq n + h_m \leq \prod_{i=1}^k [d_i, e_i] \leq \left(\prod_{i=1}^k d_i \right) \left(\prod_{i=1}^k e_i \right) < N$$

と矛盾する．よって、 $(a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) = 1$ でないとき、(B.2.35) が成立する．したがって、(B.2.33) の外側の和を $(a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) = 1$ という条件で制限してもよい．この条件は $a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]}$ を定義した連立合同方程式 (B.2.34) を思い出せば

$$\begin{aligned} (a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) &= 1 \\ \iff (v_0 + h_m, W), (h_m - h_1, [d_1, e_1]), \dots, (0, [d_m, e_m]), \dots, (h_m - h_k, [d_k, e_k]) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.2.36})$$

と言い換えられる．この言い換えた条件のうち、最初の $(v_0 + h_m, W) = 1$ は v_0 の取り方 (B.1.6) から常に成立する．また、(B.2.33) には $(\lambda 2)$ と W の定義 (B.1.4) から $d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k$ の素因子はすべて $\geq D_0$ と思ってよく、十分大の $N \geq N_0(\mathcal{H})$ に対して、

$$\max_{1 \leq i \leq k} |h_m - h_i| < D_0$$

だから、残りの条件のうち $[d_m, e_m]$ に関係しない

$$(h_m - h_i, [d_i, e_i]) = 1 \quad (i \in \{1, \dots, k\}, i \neq m)$$

も常に成立する．よって、(B.2.36) から、さらに

$$(a + h_m, W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]) = 1 \iff (0, [d_m, e_m]) = 1 \iff d_m = e_m = 1$$

と条件を言い換えられる．よって、

$$E(N, q) := \max_{(a, q)=1} \left| \sum_{\substack{N \leq p < 2N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} X_N \right| + 1 \quad \text{ただし} \quad X_N := \sum_{N \leq p < 2N} 1$$

と書けば、(B.2.33) の内側で

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv a \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} \\ n + h_m : \text{prime}}} 1 &= \sum_{\substack{N - h_m \leq p < 2N - h_m \\ p \equiv a + h_m \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{N \leq p < 2N \\ p \equiv a + h_m \pmod{W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]}}} 1 + O(1) \\ &= \frac{1}{\varphi(W) \prod_{i=1}^k \varphi([d_i, e_i])} X_N + O(E(N, q)) \end{aligned}$$

ただし

$$q = q(W, d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k) := W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$$

と書き直せる（ここで条件 (B.2.32) を思い出した）ので, (B.2.33) から

$$\begin{aligned} S_2^{(m)} &= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_m = e_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi([d_i, e_i])} + O\left(\sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} |\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}| E(N, q) \right) \\ &=: M_2 + E_2 \end{aligned} \quad (\text{B.2.37})$$

を得る. 後は主要項 M_2 と誤差項 E_2 を計算すればよい.

まず, 誤差項 E_2 を評価する. 和の条件 (B.2.32) は忘れてしまえば

$$E_2 \ll \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} |\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}| E(N, q)$$

となる. ここで $q = W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$ の値で項の場合分けをすると,

$$q = W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i] \leq W \left(\prod_{i=1}^k d_i \right) \left(\prod_{i=1}^k e_i \right)$$

を用いれば, $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ の台の条件 (λ_2) , (λ_1) , (λ_3) から

$$\begin{aligned} E_2 &\ll \lambda_{\max}^2 \sum_{q < WR^2} \mu(q)^2 E(N, q) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ q = W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]}} 1 \\ &\ll \lambda_{\max}^2 \sum_{q < WR^2} \mu(q)^2 E(N, q) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ q = W m_1 \cdots m_k}} \prod_{i=1}^k \sum_{\substack{d_i, e_i \\ [d_i, e_i] = m_i}} 1 \end{aligned} \quad (\text{B.2.38})$$

を得る. ただしここで (B.2.16) で導入した記法 $\lambda_{\max}$ を用いた. まず, 一番内側の和

$$\sum_{\substack{d_i, e_i \\ [d_i, e_i] = m_i}} 1$$

を考える. (B.2.38) の中では m_i は平方無縁であることに気をつけて

$$m_i = \prod_{p|m_i} p$$

と書くと, 数え上げる d_i, e_i は

$$d_i = \prod_{p|m_i} p^{v_p(d_i)} \quad \text{および} \quad e_i = \prod_{p|m_i} p^{v_p(e_i)}$$

であって各素数 p に対して指数の組が

$$(v_p(d_i), v_p(e_i)) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

の 3 通りのどれかで与えられるものとなる。よって,

$$\sum_{\substack{d_i, e_i \\ [d_i, e_i] = m_i}} 1 \leq 3^{\nu([d_i, e_i])}$$

を得る。これを (B.2.38) に代入して

$$(m, n) = 1 \implies \nu(m) + \nu(n) = \nu(mn)$$

に気をつければ

$$E_2 \ll \lambda_{\max}^2 \sum_{q < WR^2} \mu(q)^2 3^{\nu(q)} E(N, q) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ q = W m_1 \cdots m_k}} 1$$

を得る。さらに

$$\sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ q = W m_1 \cdots m_k}} 1 = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ q = m_1 \cdots m_k \\ W | m_1}} 1 \leq \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ q = m_1 \cdots m_k}} 1 =: \tau_k(q)$$

なので,

$$E_2 \ll \lambda_{\max}^2 \sum_{q < WR^2} \mu(q)^2 3^{\nu(q)} \tau_k(q) E(N, q)$$

を得る。Bombieri-Vinogradov の定理 (Theorem B.1.3) を使うべく, この評価を

$$E_2 \ll \lambda_{\max}^2 \sum_{q < WR^2} \mu(q)^2 3^{\nu(q)} \tau_k(q) E(N, q)^{\frac{1}{2}} \cdot E(N, q)^{\frac{1}{2}}$$

と見て Cauchy-Schwarz の不等式を用いると

$$E_2 \ll \lambda_{\max}^2 \left(\sum_{q < WR^2} \mu(q)^2 9^{\nu(q)} \tau_k(q)^2 E(N, q) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q < WR^2} E(N, q) \right)^{\frac{1}{2}} =: \lambda_{\max}^2 E_{21}^{\frac{1}{2}} E_{22}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.2.39})$$

を得る。まず, E_{21} は (B.1.5) に気をつければ

$$q < WR^2 \leq N^{\theta-2\delta} (\log \log N)^2 \leq N$$

が分かるので, 自明な評価

$$E(N, q) \leq \sum_{\substack{N \leq n < 2N \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N \leq n < 2N} 1 + 1 \leq \frac{N}{\varphi(q)} + 1 \ll \frac{N}{\varphi(q)}$$

を得る。これを用いれば

$$E_{21} \ll N \sum_{q < N} \frac{\mu(q)^2 9^{\nu(q)} \tau_k(q)^2}{\varphi(q)}$$

となる。ここで,

$$f(n) := \frac{\mu(n)^2 9^{\nu(n)} \tau_k(n)^2 n}{\varphi(n)}$$

とすれば

$$f(p) \frac{\mu(p)^2 9^{\nu(p)p} \tau_k(p)^2}{\varphi(p)} = \frac{9k^2 p}{p-1} = 9k^2 + \frac{9k^2}{p-1} = 9k^2 + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

なので, Corollary A.8.1 を $\kappa := 9k^2$, $A \ll 1$ として使えば

$$E_{21} \ll N(\log N)^{9k^2} \quad (\text{B.2.40})$$

を得る。一方の E_{22} については

$$\begin{aligned} & \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{N \leq p < 2N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} X_N \right| \\ &= \max_{(a,q)=1} \left| \left(\sum_{\substack{p < 2N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(2N)}{\varphi(q)} \right) - \left(\sum_{\substack{p < N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(N)}{\varphi(q)} \right) \right| + 1 \\ &\leq \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq 2N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(2N)}{\varphi(q)} \right| + \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(N)}{\varphi(q)} \right| + 1 \end{aligned}$$

に気をつけて

$$\begin{aligned} & \sum_{q < WR^2} E(N, q) \\ &\ll \sum_{q < WR^2} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq 2N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(2N)}{\varphi(q)} \right| + \sum_{q < WR^2} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq N \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(N)}{\varphi(q)} \right| + WR^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで十分大の $N \geq N_0(\delta)$ に対して

$$WR^2 \leq N^{\theta-2\delta} (\log \log N)^2 \leq N^{\theta-\delta}$$

であり, θ は素数の level of distribution だから

$$E_{22} \ll N(\log N)^{-A-9k^2-4k} + N^{\theta-\delta} \ll N(\log N)^{-2A-9k^2-4k} \quad (\text{B.2.41})$$

を得る。以上の (B.2.40) と (B.2.41) を (B.2.39) に代入してから Lemma B.2.5 の (iii) を用いれば

$$E_2 \ll \lambda_{\max}^2 N(\log N)^{-A-2k} \ll y_{\max}^2 N(\log N)^{-A} \quad (\text{B.2.42})$$

という評価が得られた。

次に主要項

$$M_2 = \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_m = e_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi([d_i, e_i])} \quad (\text{B.2.43})$$

について考える．まず, Lemma A.3.2 より, この和の中では

$$\frac{1}{\varphi([d_i, e_i])} = \frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \varphi((d_i, e_i)) \quad (\text{B.2.44})$$

である．(B.2.43) の右辺にある $\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}$ に対して台の条件 ($\lambda 3$) を思い出せば, (B.2.43) の右辺で d_i, e_i は平方無縁なものに制限しても良い．すると, (d_i, e_i) も平方無縁だから, (B.2.44) はさらに

$$\frac{1}{\varphi([d_i, e_i])} = \frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \prod_{p|(d_i, e_i)} (p-1) = \frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \prod_{p|(d_i, e_i)} (1+g(p))$$

と書き直せる．最後の積を展開すれば, (d_i, e_i) が平方無縁なことに注意して

$$\frac{1}{\varphi([d_i, e_i])} = \frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \sum_{u_i|(d_i, e_i)} g(u_i) = \frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \sum_{u_i|d_i, e_i} g(u_i)$$

を得る．この等式を $i = 1, \dots, k$ に渡って掛け合わせると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \varphi([d_i, e_i])} &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^k \varphi(d_i))(\prod_{i=1}^k \varphi(e_i))} \prod_{i=1}^k \sum_{u_i|d_i, e_i} g(u_i) \\ &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^k \varphi(d_i))(\prod_{i=1}^k \varphi(e_i))} \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k \\ u_i|d_i, e_i \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \end{aligned}$$

となる．これを (B.2.43) に代入すれば

$$M_2 = \frac{N}{W} \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k \\ u_i|d_i, e_i \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \varphi(u_i) \right)$$

を得る．さらに和を交換すれば

$$M_1 = \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \sum'_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_m = e_m = 1 \\ u_i|d_i, e_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k \varphi(d_i))(\prod_{i=1}^k \varphi(e_i))}$$

を得る. 和 $\sum'$ の条件 (B.2.32) を除去するため, Lemma B.2.6 の証明と同様に (B.2.21) を挿入し

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\
&\quad \times \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_m = e_m = 1 \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)) (\prod_{i=1}^k \varphi(e_i))} \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ s_{i,j} | (d_i, e_j) \ (\forall i \neq j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \\
&= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\
&\quad \times \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_m = e_m = 1 \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i) \\ s_{i,j} | d_i, e_j \ (\forall i \neq j)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)) (\prod_{i=1}^k \varphi(e_i))}
\end{aligned} \tag{B.2.45}$$

とする. Lemma B.2.6 の証明と同様に (B.2.25) で定義される a_i, b_i を導入すれば

$$\begin{cases} u_i | d_i, e_i \ (\forall i) \\ s_{i,j} | d_i, e_j \ (\forall i \neq j) \end{cases} \iff \begin{cases} a_i | d_i \ (\forall i) \\ b_i | e_i \ (\forall i) \end{cases}$$

が分かる. よって, (B.2.45) から

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\
&\quad \times \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ e_1, \dots, e_k \\ d_m = e_m = 1 \\ u_i | d_i, e_i \ (\forall i) \\ s_{i,j} | d_i, e_j \ (\forall i \neq j)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k} \lambda_{e_1, \dots, e_k}}{(\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)) (\prod_{i=1}^k \varphi(e_i))} \\
&= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\
&\quad \times \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \left(\sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ d_m = 1 \\ a_i | d_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)} \right) \left(\sum_{\substack{e_1, \dots, e_k \\ e_m = 1 \\ b_i | e_i \ (\forall i)}} \frac{\lambda_{e_1, \dots, e_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(e_i)} \right)
\end{aligned}$$

と書き直せる. さらに, $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ の定義 (B.2.31) を用いれば

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\
&\quad \times \sum_{(s_{i,j})} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i) \mu(b_i)}{g(a_i) g(b_i)} \right) y_{a_1, \dots, a_k}^{(m)} y_{b_1, \dots, b_k}^{(m)}
\end{aligned} \tag{B.2.46}$$

と書き直せる. (実数列 $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ はこのようにして現れる.) ただしここで, $(ym2)$ と W の定義 (B.1.4) から, (B.2.46) の和の中では a_i, b_i はすべて奇数なので $g(a_i), g(b_i) \neq 0$ となっていることに注意する.

(B.2.46) の右辺の和の中で, ある i, j に対して $s_{ij} > 1$ になってしまう項たちの寄与

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2 &:= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1, \dots, u_k} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ s_{i,j} > 1 \ (\exists i \neq j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j}) \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i) \mu(b_i)}{g(a_i) g(b_i)} \right) y_{a_1, \dots, a_k}^{(m)} y_{b_1, \dots, b_k}^{(m)} \end{aligned}$$

を誤差項として評価しよう. (B.2.46) の右辺の和では, $(ym2)$ と $s_{ij} \mid a_i, b_j$ から $(s_{i,j}, W) = 1$ という条件を課しても良いことを思い出す. すると, W は D_0 以下の素数をすべてかけたものだったので

$$s_{i,j} > 1 \text{ かつ } (s_{i,j}, W) = 1 \implies s_{i,j} > D_0$$

であることに注意する. さらに $(ym1), (ym2), (ym4)$ から (B.2.46) の右辺の和では

$$u_1, \dots, u_k < R, \quad (u_i, W) = 1 \ (\forall i), \quad u_m = 1, \quad (s_{i,j}, W) = 1 \ (\forall i \neq j)$$

という制限を追加できるので

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2 &\ll \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} X_N \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k < R \\ u_m = 1 \\ (u, W) = 1}} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ (s_{i,j}, W) = 1 \ (\forall i \neq j) \\ s_{i,j} > D_0 \ (\exists i \neq j)}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j})^2 \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{g(a_i) g(b_i)} \right) \end{aligned}$$

を得る. さらに和の条件 $s_{i,j} > D_0$ を達成する $(i, j) = (i_0, j_0)$ に応じて分解することで

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2 &\ll \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} X_N \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k < R \\ u_m = 1 \\ (u, W) = 1}} \left(\prod_{i=1}^k g(u_i) \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ (s_{i,j}, W) = 1 \ (\forall i \neq j) \\ s_{i_0, j_0} > D_0}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mu(s_{i,j})^2 \right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{g(a_i) g(b_i)} \right) \end{aligned} \tag{B.2.47}$$

とできる. さらに a_i, b_i の定義 (B.2.25) を思い出せば Lemma B.2.6 の証明と同様に

$$\prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2 \mu(b_i)^2}{g(a_i) g(b_i)} \leq \left(\prod_{1 \leq i \leq k} \frac{\mu(u_i)^2}{g(u_i)^2} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{g(s_{i,j})^2} \right)$$

を得ることができるので、これを (B.2.47) に代入して

$$\widetilde{M}_2 \ll \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} X_N \sum_{\substack{u_1, \dots, u_k < R \\ u_m = 1 \\ (u, W) = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(u_i)^2}{g(u_i)} \right) \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{\substack{(s_{i,j}) \\ (s_{i,j}, W) = 1 \\ s_{i_0, j_0} > D_0 \\ (\forall i \neq j) \\ i \neq j}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{g(s_{i,j})^2} \right)$$

とできる。ここで、 (i_0, j_0) の取りうる値の個数は $k(k-1) \ll 1$ 通りなので、

$$\widetilde{M}_2 \ll \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} X_N \left(\sum_{\substack{u < R \\ (u, W) = 1}} \frac{\mu(u)^2}{g(u)} \right)^{k-1} \left(\sum_{\substack{s > D_0 \\ (s, W) = 1}} \frac{\mu(s)^2}{g(s)^2} \right) \left(\sum_{\substack{s \geq 1 \\ (s, W) = 1}} \frac{\mu(s)^2}{g(s)^2} \right)^{k(k-1)-1}$$

を得る。右辺の和に Lemma B.2.7 を用いれば、

$$\widetilde{M}_2 \ll \frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} X_N (\log N)^{k-1}$$

さらに、素数定理 (Theorem B.1.2) から得られる

$$X_N \leq \pi(2N) \ll N(\log N)^{-1} \ll N(\log R)^{-1}$$

を使えば

$$\widetilde{M}_2 \ll \frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} X_N (\log R)^{k-1} \ll \frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} N (\log R)^{k-2} \quad (\text{B.2.48})$$

を得る。よって、(B.2.46) と $\widetilde{M}_2$ の定義 (B.2.48) を思い出せば、すべての相異なる $i, j \in \{1, \dots, k\}$ に対して $s_{i,j} = 1$ のとき $a_i = b_i = u_i$ だから和を取る変数を $u_i \rightsquigarrow r_i$ と書き換えて

$$M_1 = \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} + O\left(\frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} N (\log R)^{k-2} \right) \quad (\text{B.2.49})$$

を得る。右辺の X_N に対しては、素数定理 (Theorem B.1.2) を用いれば

$$\begin{aligned} X_N &= \pi(2N) - \pi(N) + O(1) = \frac{2N}{\log(2N)} - \frac{N}{\log N} + O\left(\frac{N}{(\log N)^2} \right) \\ &= \frac{2N}{\log N} - \frac{(2 \log 2)N}{(\log(2N))(\log N)} - \frac{N}{\log N} + O\left(\frac{N}{(\log N)^2} \right) \\ &= \frac{N}{\log N} + O\left(\frac{N}{(\log N)^2} \right) \end{aligned}$$

が得られる。この誤差項の寄与は Lemma B.2.7 の (B.2.30) と $(ym1)$, $(ym2)$, $(ym3)$ から

$$\begin{aligned} \frac{N}{\varphi(W)(\log N)^2} \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} &\ll \frac{1}{\log N} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \frac{N}{\log N} \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W) = 1}} \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \right)^{k-1} \\ &\ll \frac{1}{\log N} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} N (\log R)^{k-2} \end{aligned}$$

$$\ll \frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} N(\log R)^{k-2}$$

と評価できる. よって, (B.2.49) は

$$M_1 = \frac{N}{\varphi(W) \log N} \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} + O\left(\frac{1}{D_0} \frac{(y_{\max}^{(m)})^2}{\varphi(W)} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^{k-1} N(\log R)^{k-2} \right) \quad (\text{B.2.50})$$

と書き直せる.

最後に (B.2.42) と (B.2.50) を (B.2.37) に代入すれば結果を得る. $\square$

B.2.3 $y_{r_1, \dots, r_k}$ と $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ の間の関係式の導出

Lemma B.2.6 と Lemma B.2.8 によって和 S_1 と S_2 の計算がある程度でき, その主要項は変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ と $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ で与えられた. 最初に用いていた変数 $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ から $y_{r_1, \dots, r_k}$ への変換は Lemma B.2.5 から可逆であることが分かった. 一方, $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ も最初の変数 $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ を用いて定義されているので, $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ は $y_{r_1, \dots, r_k}$ を使って表示可能なはずであり, そうすると最適化問題は変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ のみを用いて議論できる. ここでは, この $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ と $y_{r_1, \dots, r_k}$ の間の関係式を扱いやすい形に整理しておく.

Lemma B.2.9 (Lemma 5.3 [2, p. 398]). 自然数 $r_1, \dots, r_k$ に対して, $r_m = 1$ のとき

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \sum_{a_m} \frac{y_{r_1, \dots, r_{m-1}, a_m, r_{m+1}, \dots, r_k}}{\varphi(a_m)} + O\left(\frac{y_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)$$

が成り立つ. ただしここで $y_{r_1, \dots, r_k}$, $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ は Lemma B.2.6, Lemma B.2.8 のように与えられて, implicit constant は k のみに依存する.

Proof. まず, $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ の定義 (B.2.31) に Lemma B.2.5 の (ii) を代入して

$$\begin{aligned} y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} &= \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ r_i | d_i \ (\forall i) \\ d_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1, \dots, d_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ r_i | d_i \ (\forall i) \\ d_m = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ d_i | a_i \ (\forall i)}} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \end{aligned}$$

を得る. ここで和を交換して

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{a_1, \dots, a_k} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ r_i | d_i \ (\forall i) \\ d_i | a_i \ (\forall i) \\ d_m = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} \right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{a_1, \dots, a_k} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \left(\sum_{\substack{d_i \\ r_i | d_i \\ d_i | a_i}} \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} \right)$$

を得る。ここで、内側の和が空和でなければ、 $i \neq m$ に対しては

$$r_i \mid d_i \text{ かつ } d_i \mid a_i \rightsquigarrow r_i \mid a_i$$

が成立し、 $i = m$ のときは $r_m = 1$ より明らかに $r_m \mid a_m$ だから

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ r_i | a_i \ (\forall i)}} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \left(\sum_{\substack{d_i \\ r_i | d_i \\ d_i | a_i}} \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} \right) \quad (\text{B.2.51})$$

と外側の和を制限できる。すると、内側の和で $d_i \rightsquigarrow r_i d_i$ と変数変換すれば

$$\sum_{\substack{d_i \\ r_i | d_i \\ d_i | a_i}} \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} = \sum_{d_i | a_i / r_i} \frac{\mu(r_i d_i) r_i d_i}{\varphi(r_i d_i)}$$

となるが、(B.2.51) の右辺では (y3) から a_i は平方無縁だと思って良いので

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d_i \\ r_i | d_i \\ d_i | a_i}} \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} &= \frac{\mu(r_i) r_i}{\varphi(r_i)} \sum_{d_i | a_i / r_i} \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} \\ &= \frac{\mu(r_i) r_i}{\varphi(r_i)} \prod_{p | a_i / r_i} \left(1 - \frac{p}{p-1} \right) \\ &= \frac{\mu(r_i) r_i}{\varphi(r_i)} \prod_{p | a_i / r_i} \left(\frac{\mu(p)}{\varphi(p)} \right) = \frac{\mu(r_i) r_i}{\varphi(r_i)} \frac{\mu(a_i / r_i)}{\varphi(a_i / r_i)} = \frac{\mu(a_i) r_i}{\varphi(a_i)} \end{aligned}$$

を得る。これを (B.2.51) に代入して

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) r_i \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ r_i | a_i \ (\forall i)}} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\mu(a_i)}{\varphi(a_i)} \quad (\text{B.2.52})$$

を得る。ここで、(B.2.52) の右辺で、ある $i \neq m$ で $a_i > r_i$ となってしまう項たちの寄与

$$\widehat{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} := \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) r_i \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ r_i | a_i \ (\forall i) \\ a_i > r_i \ (\exists i \neq m)}} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\mu(a_i)}{\varphi(a_i)}$$

を評価する。この和の中では (y2) と W の定義 (B.1.4) から

$$a_i > r_i \text{ かつ } (a_i, W) = 1 \implies a_i \geq D_0 r_i$$

となるので

$$\tilde{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) r_i \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ r_i | a_i \ (\forall i) \\ a_i \geq D_0 r_i \ (\exists i \neq m)}} \frac{y_{a_1, \dots, a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\mu(a_i)}{\varphi(a_i)}$$

とできる. さらに $(y1), (y2), (y3)$ より

$$\tilde{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} \ll y_{\max} \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i)^2 g(r_i) r_i \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k < R \\ r_i | a_i \ (\forall i) \\ (a_i, W)=1 \\ a_i \geq D_0 r_i \ (\exists i \neq m)}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)}$$

と評価できる. さらに, $a_i \geq D_0 r_i$ となる $i \neq m$ に応じて場合分けをして

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} &\ll y_{\max} \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i)^2 g(r_i) r_i \right) \sum_{\substack{1 \leq i_0 \leq k \\ i_0 \neq m}} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k < R \\ r_i | a_i \ (\forall i) \\ (a_i, W)=1 \\ a_{i_0} \geq D_0 r_{i_0}}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)} \\ &\ll y_{\max} \left(\prod_{i=1}^k \mu(r_i)^2 g(r_i) r_i \right) \sum_{\substack{1 \leq i_0 \leq k \\ i_0 \neq m}} \left(\sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m, W)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\substack{a_{i_0} \geq r_{i_0} D_0 \\ r_{i_0} | a_{i_0}}} \frac{\mu(a_{i_0})^2}{\varphi(a_{i_0})^2} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m, i_0}} \left(\sum_{r_i | a_i} \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)^2} \right) \end{aligned}$$

とできる. ここで $r_m = 1$ を思い出し, 一般に成り立つ不等式 $\varphi(mn) \geq \varphi(m)\varphi(n)$ を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} &\ll y_{\max} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 g(r_i) r_i}{\varphi(r_i)^2} \right) \sum_{\substack{1 \leq i_0 \leq k \\ i_0 \neq m}} \left(\sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m, W)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{a_{i_0} \geq D_0} \frac{\mu(a_{i_0})^2}{\varphi(a_{i_0})^2} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m, i_0}} \left(\sum_{r_i | a_i} \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)^2} \right) \end{aligned}$$

とできる. ここで Lemma B.2.4 を用いれば, i_0 の可能性は $\leq k-1 \ll 1$ 通りしかないから

$$\tilde{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} \ll \frac{y_{\max}}{D_0} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 g(r_i) r_i}{\varphi(r_i)^2} \right) \frac{\varphi(W)}{W} \log R \quad (\text{B.2.53})$$

を得る. ここで右辺の積は, 平方無縁数 r に対して

$$\frac{g(r)r}{\varphi(r)^2} = \prod_{p|r} \left(\frac{(p-2)p}{(p-1)^2} \right) = \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \leq 1$$

であることを用いて $\ll 1$ と評価でき, 結局

$$\tilde{y}_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} \ll \frac{y_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R$$

を得る. これを (B.2.52) に用いると $i \neq m$ に対して $a_i = r_i$ なる項のみ主要項に残り

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 g(r_i) r_i}{\varphi(a_m)^2} \right) \sum_{a_m} \frac{y_{r_1, \dots, r_{m-1}, a_m, r_{m+1}, \dots, r_k}}{\varphi(a_m)} + O\left(\frac{y_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R \right) \quad (\text{B.2.54})$$

を得る. 次に右辺の積

$$\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 g(r_i) r_i}{\varphi(a_m)^2}$$

については, 平方無縁数 r が $\chi(r, W) = 1$ を満たせば ($D_0 \geq 2$ なら r が奇数になることに注意して)

$$\frac{g(r)r}{\varphi(r)^2} = \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \prod_{p>D_0} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2} \right) \right) = \exp\left(\sum_{p>D_0} \frac{1}{p^2} \right) = 1 + O\left(\frac{1}{D_0} \right)$$

とできるから, (B.2.54) においては $r_m = 1$ であるから, (y2), (y3) も用いると

$$\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 g(r_i) r_i}{\varphi(a_m)^2} = \prod_{i=1}^k \left(1 + O\left(\frac{1}{D_0} \right) \right) = 1 + O\left(\frac{1}{D_0} \right) \quad (\text{B.2.55})$$

と評価できる. よって, (B.2.54) は

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \sum_{a_m} \frac{y_{r_1, \dots, r_{m-1}, a_m, r_{m+1}, \dots, r_k}}{\varphi(a_m)} + O\left(\frac{1}{D_0} \sum_{a_m} \frac{|y_{r_1, \dots, r_{m-1}, a_m, r_{m+1}, \dots, r_k}|}{\varphi(a_m)} + \frac{y_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R \right) \quad (\text{B.2.56})$$

と書き直せる. 右辺最初の誤差項は (y1), (y2), (y3) と (B.2.53) を用いて

$$\sum_{a_m} \frac{|y_{r_1, \dots, r_{m-1}, a_m, r_{m+1}, \dots, r_k}|}{\varphi(a_m)} \ll y_{\max} \sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m, W)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)} \ll y_{\max} \frac{\varphi(W)}{W} \log R$$

と評価できるので, (B.2.56) から主張を得る. $\square$

B.3 Smooth function による weight の設定

B.3.1 動機づけ

Proposition B.1.3 の証明の議論を思い出せば, 我々の目的のためには, 比

$$\frac{\sum_{m=1}^k S_2^{(m)}}{S_1} \quad (\text{B.3.1})$$

をなるべく大きくしたい. Lemma B.2.5 で変数 $\lambda_{d_1, \dots, d_k}$ を変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ に変数変換しており (逆変換の成立を示しており), Lemma B.2.9 で $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ を変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ で表示できているので, 今考えるべきなのは比 (B.3.1) をなるべく大きくするように変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ の値を選ぶことである. ここではま

ず、どのようにこの最適化が解決できるか、大まかに議論してアイデアを得よう。注意であるが、以下 $y_{r_1, \dots, r_k}$ の添字 $r_1, \dots, r_k$ は条件 (y1), (y2), (y3) を満たす範囲のみ動くものとする。（そうでない $r_1, \dots, r_k$ に対しては $y_{r_1, \dots, r_k} = 0$ 以外の値の選び方ができない。）

まず, Lemma B.2.6, Lemma B.2.8 より, 問題の比 (B.3.1) は

$$\frac{W}{\varphi(W) \log N} \frac{\sum_{m=1}^k \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)}}{\sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)}}$$

で近似できるとして良い。ただしここで、分子の和においては $y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ の台の条件 (ym4) より $r_m = 1$ なる項しか現れないことに注意する。最初の因子は $y_{r_1, \dots, r_k}$ の値に依存しないので比

$$\frac{\sum_{m=1}^k \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)}}{\sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)}} \quad (\text{B.3.2})$$

を考えれば十分である。ここで Lemma B.2.9 を

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} \approx \sum_{a_m} \frac{y_{r_1, \dots, y_{m-1}, a_m, y_{m+1}, \dots, y_k}}{\varphi(a_m)} \quad (\text{B.3.3})$$

と思ってしまうと、比 (B.3.2) の分母分子ともに変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ の 2 次の斉次式なので、変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ を一斉にスカラー倍しても（0 倍を除く）比 (B.3.2) は不変である。従って、比 (B.3.2) の分母を

$$\sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} = 1 \quad (\text{B.3.4})$$

と正規化して最大化問題を考えても損失はないことになる。この正規化の下で、(B.3.3) を使えば、比 (B.3.2) は変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ の 2 次形式

$$\sum_{m=1}^k \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} \approx \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ r_m=1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{g(r_i)} \right) \left(\sum_{a_m} \frac{y_{r_1, \dots, y_{m-1}, a_m, y_{m+1}, \dots, y_k}}{\varphi(a_m)} \right)^2 \quad (\text{B.3.5})$$

となる。つまり、我々の最大化問題は、正規化条件 (B.3.4) の下での 2 次形式 (B.3.5) の変数 $y_{r_1, \dots, r_k}$ に関する最大化ということになる。

上記の最大化問題に Lagrange の未定乗数法を用いることにすれば、関数

$$\Phi(\mathbf{y}, \lambda) := \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ r_m=1}} \frac{(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} - \lambda \left(\sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} - 1 \right) \quad \text{ただし } \mathbf{y} = (y_{r_1, \dots, r_k})$$

の停留点を探すことになる．そこで $(y_1), (y_2), (y_3)$ の条件を $r_1, \dots, r_k$ の代わりに満たすような $u_1, \dots, u_k$ で $y_{u_1, \dots, u_k}$ で偏微分すると

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{y}, \lambda)}{\partial y_{u_1, \dots, u_k}} = 2 \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ r_m=1}} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} \frac{\partial y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}}{\partial y_{u_1, \dots, u_k}} - 2\lambda \frac{y_{u_1, \dots, u_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(u_i)}$$

となるが, (B.3.3) から

$$\frac{\partial y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}}{\partial y_{u_1, \dots, u_k}} = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(u_m)} & \text{すべての } i \neq m \text{ に対して } r_i = u_i \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\mathbf{y}, \lambda)}{\partial y_{u_1, \dots, u_k}} &= 2 \sum_{m=1}^k \frac{y_{u_1, \dots, u_{m-1}, 1, u_m, \dots, u_k}^{(m)}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k g(u_i)} \frac{1}{\varphi(u_m)} - 2\lambda \frac{y_{u_1, \dots, u_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(u_i)} \\ &= \frac{2}{\prod_{i=1}^k g(u_i)} \sum_{m=1}^k \frac{g(u_m)}{\varphi(u_m)} y_{u_1, \dots, u_{m-1}, 1, u_m, \dots, u_k}^{(m)} - 2\lambda \frac{y_{u_1, \dots, u_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(u_i)} \end{aligned}$$

となる．よって, これら偏微分に対する停留条件は, 添字 $u_1, \dots, u_k$ を $r_1, \dots, r_k$ に書き戻すと

$$\lambda y_{r_1, \dots, r_k} = \left(\prod_{i=1}^k \frac{\varphi(r_i)}{g(r_i)} \right) \sum_{m=1}^k \frac{g(r_m)}{\varphi(r_m)} y_{r_1, \dots, r_{m-1}, 1, r_m, \dots, r_k}^{(m)} \quad (\text{B.3.6})$$

となる．(わざわざ Lagrange の未定乗数法と呼んだが, これは (B.3.5) の gradient が曲面 (B.3.4) の接空間に入る条件を求めたというだけである．) なお, λ に関する停留条件は正規化条件 (B.3.4) そのものなので, あまり重要ではない．

停留条件 (B.3.6) は, 一見, 数論的関数 φ, g を含むため「数論的」に見える．しかし今, $y_{r_1, \dots, r_k}$ の台の条件 (y2) から, r_i たちは小さい素因数を持たないことになっているので, Lemma B.2.9 の証明中の (B.2.55) を導く議論を参考にすれば, 近似

$$\frac{g(r_i)}{\varphi(r_i)} \approx 1 \quad \text{および} \quad \frac{r_i}{\varphi(r_i)} \approx 1 \quad (\text{B.3.7})$$

を期待できる (Remark B.3.1 を参照)．よって, 停留条件 (B.3.6) は変換公式 (B.3.3) を用いて

$$\lambda y_{r_1, \dots, r_k} = \sum_{m=1}^k \sum_{a_m} \frac{y_{r_1, \dots, y_{m-1}, a_m, y_{m+1}, \dots, y_k}}{a_m} \quad (\text{B.3.8})$$

と思える．この (B.3.8) はもはや「数論的」には見えない (Remark B.3.2 を参照) ので, $y_{r_1, \dots, r_k}$ は変数 $r_1, \dots, r_k$ に対する滑らかな関数で与えられるだろうと期待できる．そこで以下, 滑らかな関数

$$F \in \mathcal{S}_k^1 := \{F := [0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R} \mid F(t) = 0 \ (t \notin \mathcal{R}_k), \ F \text{ は } C^1 \text{ 級} \}$$

ただし

$$\mathcal{R}_k := \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, \infty)^k \mid t_1 + \dots + t_k \leq 1\}$$

を取り（この $\mathcal{R}_k$ と $\mathcal{S}_k^1$ はすでに Section B.1.3 で導入されている）, (B.3.8) の a_m に渡る和を簡単にするための変数の正規化を含めて, $(y1), (y2), (y3)$ を満たす変数 $r_1, \dots, r_k$ に対して, 先と同様に

$$r = \prod_{i=1}^k r_i$$

と書いたとき $(y_{r_1, \dots, r_k})$ と $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ を

$$y_{r_1, \dots, r_k} := \begin{cases} F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right) & (r, W) = 1 \text{ かつ } r \text{ が平方無縁のとき,} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases} \quad (\text{B.3.9})$$

$$\lambda_{d_1, \dots, d_k} := \left(\prod_{i=1}^k \mu(d_i) d_i \right) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ d_i | r_i (\forall i)}} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)}$$

と選ぶことにする. ここで $\mathcal{R}_k$ を定義する条件

$$t_1 + \dots + t_k \leq 1$$

は $y_{r_1, \dots, r_k}$ の台の条件 $(y1)$ を書き換えた

$$\frac{\log r_1}{\log R} + \dots + \frac{\log r_k}{\log R} \leq 1$$

に対応する. この (B.3.9) の下では, $(y1), (y2), (y3)$ が満たされるので, Lemma B.2.5 の (ii) より $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ は $(\lambda1), (\lambda2), (\lambda3)$ を満たすことが分かり, Section B.2 の結果を使えることがわかる. 以下, $(y_{r_1, \dots, r_k})$ と $(\lambda_{d_1, \dots, d_k})$ を (B.3.9) と選んだときに Lemma B.2.6 と Lemma B.2.8 の主要項がどのようになるか計算することにする.

Remark B.3.1. 実は, (B.3.7) を期待する理由として「(B.2.55) を導く議論を参考にすれば」と言うのは少し嘘. 今の状況では本当は (B.2.55) とは違って

$$(r, W) = 1 \text{ かつ } r : \text{平方無縁} \implies \frac{g(r)}{\varphi(r)}, \frac{r}{\varphi(r)} = \prod_{p|r} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

と「誤差項」の素数べきが 1 次しかないので, 「(B.2.55) を導く議論を使う」のは不可能である. もう少し気分良く近似 (B.3.7) を用いたい場合は, 最終的な比 (B.3.2) では添字 $r_1, \dots, r_k$ に渡って和が取られていることに注意し, (B.3.7) が平均的に成立することを次のように示せば良い. 問題を単純化して, 例えば平方無縁数に台を持つ実数列 (y_r) に対して

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{g(r)}{\varphi(r)} \cdot \frac{y_r^2}{g(r)} \approx \sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{y_r^2}{g(r)} \quad (\text{B.3.10})$$

という近似を考察する. (B.3.10) の両辺の和は一重和であるが, 多重和に対しても特定の成分に

注目すれば良い. (B.3.10) の誤差は Cauchy–Schwarz 不等式より

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \left(\frac{g(r)}{\varphi(r)} - 1 \right) \frac{y_r^2}{g(r)} \ll y_{\max}^2 \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \left(\frac{g(r)}{\varphi(r)} - 1 \right)^2 \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3.11})$$

とできる. (B.3.11) の左辺前半の因子は展開して

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \left(\frac{g(r)}{\varphi(r)} - 1 \right)^2 \frac{\mu(r)^2}{g(r)} &= \sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2 g(r)}{\varphi(r)^2} - 2 \sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)} + \sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \\ &=: \sum_{r < R} g_1(r) - 2 \sum_{r < R} g_2(r) + \sum_{r < R} g_3(r) \end{aligned}$$

とする. ここに Theorem A.6.1 を用いる. 各 g_i に対応する γ_i はすべて

$$\gamma_i(p) = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

を満たすので, $\kappa = 1$, $A \ll 1$ と取れる. また, L は Mertens の定理を用いて

$$L \ll 1 + \sum_{p \leq D_0} \frac{\log p}{p} \ll \log D_0$$

と評価できる. よって, Theorem A.6.1 から

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \left(\frac{g(r)}{\varphi(r)} - 1 \right)^2 \frac{\mu(r)^2}{g(r)} = (c_{g_1} - 2c_{g_2} + c_{g_3})(\log R) + O(\log D_0)$$

を得る. さらに, 添字 $i = 1, 2, 3$ の値に関係なく

$$\begin{aligned} c_{g_i} &= \frac{\varphi(W)}{W} \prod_{p > D_0} \left(1 - \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{\varphi(W)}{W} \prod_{p > D_0} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right) = \frac{\varphi(W)}{W} \left(1 + O\left(\frac{1}{D_0}\right) \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \left(\frac{g(r)}{\varphi(r)} - 1 \right)^2 \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \ll \frac{1}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R \quad (\text{B.3.12})$$

と評価できる. 一方, (B.3.11) の右辺後半の因子は

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \ll \frac{\varphi(W)}{W} \log R \quad (\text{B.3.13})$$

と評価できる. 以上の (B.3.12) と (B.3.13) を (B.3.11) に代入して

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{g(r)}{\varphi(r)} \cdot \frac{y_r^2}{g(r)} = \sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{y_r^2}{g(r)} + O\left(\frac{y_{\max}^2}{\sqrt{D_0}} \frac{\varphi(W)}{W} \log R\right)$$

を得ることができる. この評価は, 近似

$$\frac{g(r)}{\varphi(r)} \approx 1$$

を平均的に正当化していると見ることができる.

Remark B.3.2. 「(B.3.8) はもはや「数論的」には見えない」とはいいつつ, 添字 $y_{r_1, \dots, r_k}$ の添字には (y2), (y3) のような数論的な条件がついている. 平方無縁であることを課す (y3) は W と互いに素であることを課す (y2) を使い

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1 \\ r: \text{not square-free}}} 1 \leq \sum_{p > D_0} \sum_{\substack{r < R \\ p^2 | r}} 1 \leq \sum_{p > D_0} \frac{R}{p^2} \ll \frac{R}{D_0}$$

を想起すればそれほど重要でないように見える. 例えば, Maynard の論文の (6.5) での議論等を参照のこと. 一方, (y2) についてはセミナーオーガナイザーにも多少の疑問が残る. (結局こたわっても最終結果には意味がないのかもしれないが.)

B.3.2 和 S_1 の主要項の計算

まずは, 和 S_1 について取り扱う. 以下, 部分総和法の誤差項を記述するため $F \in \mathcal{S}_k^1$ に対して

$$F_{\max} := \sup_{(t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k} \left(|F(t_1, \dots, t_k)| + \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial F(t_1, \dots, t_k)}{\partial t_i} \right| \right) \quad (\text{B.3.14})$$

と書くことにする. 次の Lemma B.3.1 では一時的に補足資料 A の Section A.6 の記法を用いる. (特に数論的関数 g の意味合いが異なることに注意する.)

Lemma B.3.1. 仮定 $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ と $\kappa = 1$ の下, 自然数 k , C^1 級関数 $\Phi \in \mathcal{S}_k^1$ と $x \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_k < x} \left(\prod_{i=1}^k g(n_i) \right) \Phi\left(\frac{\log n_1}{\log x}, \dots, \frac{\log n_k}{\log x}\right) \\ &= c_g^k (\log x)^k \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Phi(t_1, \dots, t_k) dt_1 \cdots dt_k + O(c_g^k \Phi_{\max} L (\log x + L)^{k-1}) \end{aligned}$$

が成立する. ただし $\Phi_{\max}$ は (B.3.14) で定め, implicit constant は A_1, A_2, k のみに依存する.

Proof. 自然数 k に関する帰納法で示す. 帰納法のステップごとに誤差項の implicit constant が大きくなるが, ステップの回数は k にしか依存しないので最終的には, k にさえ依存すれば Landau 記号のための implicit constant を取ることが出来る.

Initial step. $k = 1$ のとき. このとき, 主張は

$$\sum_{n_1 < x} g(n_1) \Phi\left(\frac{\log n_1}{\log x}\right) = c_g(\log x) \int_0^1 \Phi(t_1) dt_1 + O(c_g \Phi_{\max} L)$$

という形になる. これは Theorem A.6.2 そのものである.

Induction step from k to $k+1$. 自然数 n_{k+1} に対して, 関数

$$\Phi_{n_{k+1}} : [0, \infty)^k \rightarrow \mathbb{R}; (t_1, \dots, t_k) \mapsto \Phi\left(t_1, \dots, t_k, \frac{\log n_{k+1}}{\log x}\right)$$

を考えると, 明らかに $\Phi_{n_{k+1}} \in \mathcal{S}_k^1$ であり,

$$(\Phi_{n_{k+1}})_{\max} \leq \Phi_{\max}$$

である. よって, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1, \dots, n_k < x} \left(\prod_{i=1}^k g(n_i) \right) \Phi_{n_{k+1}}\left(\frac{\log n_1}{\log x}, \dots, \frac{\log n_k}{\log x}\right) \\ &= c_g^k (\log x)^k \int_0^1 \dots \int_0^1 \Phi_{n_{k+1}}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k + O(c_g^k \Phi_{\max} L (\log x + L)^{k-1}) \end{aligned}$$

を得る. ここに $g(n_{k+1})$ をかけて $n_{k+1} < x$ に渡って和を取ると

$$\sum_{n_1, \dots, n_k, n_{k+1} < x} \left(\prod_{i=1}^{k+1} g(n_i) \right) \Phi\left(\frac{\log n_1}{\log x}, \dots, \frac{\log n_k}{\log x}, \frac{\log n_{k+1}}{\log x}\right) = M + O(E) \quad (\text{B.3.15})$$

ただし

$$\begin{aligned} M &:= c_g^k (\log x)^k \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\sum_{n_{k+1} < x} g(n_{k+1}) \Phi_{n_{k+1}}(t_1, \dots, t_k) \right) dt_1 \dots dt_k, \\ E &:= c_g^k \Phi_{\max} L (\log x + L)^{k-1} \sum_{n_{k+1} < x} g(n_{k+1}) \end{aligned}$$

を得る. 主要項の M は, まず

$$M = c_g^k (\log x)^k \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\sum_{n_{k+1} < x} g(n_{k+1}) \Phi\left(t_1, \dots, t_k, \frac{\log n_{k+1}}{\log x}\right) \right) dt_1 \dots dt_k$$

と書き直す. すると, この内側の和において

$$\Phi_{t_1, \dots, t_k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \Phi(t_1, \dots, t_k, t)$$

と書けば、 $\Phi_{t_1, \dots, t_k}$ は C^1 級で

$$(\Phi_{t_1, \dots, t_k})_{\max} \leq \Phi_{\max}$$

であるので、 n_{k+1} に渡る和に Theorem A.6.2 が使えて

$$\begin{aligned} M = c_g^{k+1} (\log x)^{k+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Phi(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}) dt_1 \cdots dt_k dt_{k+1} \\ + O(c_g^{k+1} \Phi_{\max} L (\log x)^k) \end{aligned} \quad (\text{B.3.16})$$

が成立する. 一方の E も Theorem A.6.1 より

$$E \ll c_g^k \Phi_{\max} L (\log x + L)^{k-1} (c_g \log x + c_g L) = c_g^{k+1} \Phi_{\max} L (\log x + L)^k \quad (\text{B.3.17})$$

と評価できる. 以上の (B.3.16) と (B.3.17) を (B.3.15) に代入して第 $k+1$ 番目の主張を得る.

以上で、帰納法により主張が示された. □

Lemma B.3.2. (B.3.9) の下,

$$S_1 = \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k I_k(F) + O \left(\frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \right)$$

が十分大の $N \geq N_0(\mathcal{H}, \delta)$ で成り立つ. ただしここで $I_k(F)$ は (B.1.7) で定義したように

$$I_k(F) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(t_1, \dots, t_k)^2 dt_1 \cdots dt_k$$

で与えられ、implicit constant は $\mathcal{H}, \delta$ のみに依存する.

Proof. Lemma B.2.6 を用いる. (B.3.9) の下 $0 \leq y_{\max} \leq F_{\max}$ なので、Lemma B.2.6 の誤差項は

$$\frac{1}{D_0} \frac{y_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \ll \frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k$$

と抑えられる. よって後は Lemma B.2.6 の主要項の和が

$$M := \sum_{r_1, \dots, r_k} \frac{y_{r_1, \dots, r_k}^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} = \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log R)^k I_k(F) + O \left(\frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log R)^k \right) \quad (\text{B.3.18})$$

となることを示せば良い. (B.3.9) を添字 $r_1, \dots, r_k$ の条件に気をつけて代入すると,

$$M = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ (r_i, r_j)=1 \ (\forall i \neq j) \\ (r_i, W)=1 \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right) F \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R} \right)^2.$$

この和に Lemma B.3.1 を用いたい. しかし、このためには

$$(r_i, r_j) = 1 \ (\forall i \neq j)$$

という異なる変数を跨る条件が邪魔なので取り除きたい．そこで，

$$M = \sum_1 - \sum_2 \quad (\text{B.3.19})$$

ただし

$$\begin{aligned} \sum_1 &:= \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ (r_i, W)=1 \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right) F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right)^2, \\ \sum_2 &:= \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ (r_i, r_j) > 1 \ (\exists i \neq j) \\ (r_i, W)=1 \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right) F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right)^2 \end{aligned}$$

と分解して， $\sum_1$ と $\sum_2$ をそれぞれ計算する．

まず， $\sum_1$ については，Lemma B.3.1 を用いる．Lemma B.3.1 における乗法的関数 g としては

$$\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \mathbb{1}_{(n, W)=1}$$

を用いればよい．素数 p に対して

$$\frac{\mu(p)^2}{\varphi(p)} \mathbb{1}_{(p, W)=1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & (p \nmid W \text{ のとき}), \\ 0 & (p \mid W \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，Lemma B.3.1 における γ は今

$$\gamma(p) = \begin{cases} 1 & (p \nmid W \text{ のとき}), \\ 0 & (p \mid W \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．この γ に対して仮定 (Γ_1) , (Γ_2) を確かめる．まず (Γ_1) は，素数 p に対して

$$0 \leq \frac{\gamma(p)}{p} \leq \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1}{2}$$

だから $A_1 = 2$ で成立している．次に，Mertens の定理 (Theorem A.5.1) より， $2 \leq w \leq z$ に対して

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\gamma(p) \log p}{p} \leq \sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} + O(1)$$

および

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\gamma(p) \log p}{p} = \sum_{\substack{w \leq p < z \\ p > D_0}} \frac{\log p}{p} \geq \sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leq D_0} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} - \log D_0 + O(1)$$

が得られるので， (Γ_2) は

$$\kappa = 1, \quad A_2 = O(1), \quad L = \log D_0 + O(1) \ll \log D_0 \ll \frac{1}{D_0} \log R$$

とともに成立している. さらに定数 c_g は今

$$c_g = \frac{1}{\Gamma(\kappa+1)} \prod_p \left(1 - \frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p|W} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(W)}{W}$$

という値を取る. よって,

$$\begin{aligned} (F^2)_{\max} &= \sup_{(t_1, \dots, t_k) \in [0,1]^k} \left(|F(t_1, \dots, t_k)|^2 + 2 \sum_{i=1}^k |F(t_1, \dots, t_k)| \left| \frac{\partial F(t_1, \dots, t_k)}{\partial t_i} \right| \right) \\ &\ll F_{\max}^2 \end{aligned}$$

に注意すれば, Lemma B.3.1 より

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log R)^k \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(t_1, \dots, t_k)^2 dt_1 \cdots dt_k \\ &\quad + O \left(F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log D_0) (\log R + \log D_0)^{k-1} \right) \quad (\text{B.3.20}) \\ &= \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log R)^k I_k(F) + O \left(\frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log R)^k \right) \end{aligned}$$

が得られる.

次に, $\sum_2$ を評価する. まず, F の台が $\mathcal{R}_k \subseteq [0,1]^k$ に含まれることを思い出し

$$\sum_2 = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_i, r_j) > 1 \ (\exists i \neq j) \\ (r_i, W) = 1 \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right) F \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R} \right)^2$$

と和の範囲を制限した後, 条件 $(r_i, r_j) = 1$ を満たさない組 (i, j) に渡って分類して

$$\sum_2 \leq F_{\max}^2 \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_{i_0}, r_{j_0}) > 1 \\ (r_i, W) = 1 \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right)$$

とできる. さらに, W の定義 (B.1.4) を思い出すと $(r_i, W) = 1$ から r_i の素因子はすべて D_0 以上であることがわかるので, $(r_{i_0}, r_{j_0}) > 1$ であれば, ある素数 $p \geq D_0$ が存在して $p \mid (r_{i_0}, r_{j_0})$ となること
がわかる. この素因子 p で場合分けをすることで, さらに

$$\sum_2 \leq F_{\max}^2 \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{p \geq D_0} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ p \mid r_{i_0}, r_{j_0} \\ (r_i, W) = 1 \ (\forall i)}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right)$$

とできる. すると右辺の和は各変数 $r_1, \dots, r_k$ ごとの和に分解できて

$$\sum_2 \leq F_{\max}^2 \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0}} \sum_{p \geq D_0} \left(\sum_{\substack{r_{i_0} < R \\ p \mid r_{i_0} \\ (r_{i_0}, W) = 1}} \frac{\mu(r_{i_0})^2}{\varphi(r_{i_0})} \right) \left(\sum_{\substack{r_{j_0} < R \\ p \mid r_{j_0} \\ (r_{j_0}, W) = 1}} \frac{\mu(r_{j_0})^2}{\varphi(r_{j_0})} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0, j_0}}^k \left(\sum_{\substack{r_i < R \\ (r_i, W) = 1}} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)} \right)$$

$$\ll F_{\max}^2 \sum_{p \geq D_0} \left(\sum_{\substack{r < R \\ p|r \\ (r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)} \right)^2 \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)} \right)^{k-2}$$

とできる. ここで不等式 $\varphi(mn) \geq \varphi(m)\varphi(n)$ と $\varphi(p) = p-1$ を用いて

$$\sum_2 \ll F_{\max}^2 \left(\sum_{p \geq D_0} \frac{1}{(p-1)^2} \right) \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)} \right)^k \ll \frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{\varphi(r)} \right)^k$$

を得る. ここで, Lemma B.2.4 を用いれば

$$\sum_2 \ll \frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k (\log R)^k \quad (\text{B.3.21})$$

を得ることができる.

以上の (B.3.20) と (B.3.21) を (B.3.19) に代入すれば, (B.3.18) が得られて, 主張を得る. $\square$

B.3.3 $S_2^{(m)}$ の主要項の計算

Lemma B.3.3. (B.3.9) を仮定する. 自然数 $r_1, \dots, r_k$ であって,

$$r := \prod_{i=1}^k r_i$$

と書いたとき, $r < R$, $(r, W) = 1$, r は平方無縁, $r_m = 1$ なるものを考える. このとき,

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \frac{\varphi(W)}{W} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\varphi(r_i)}{r_i} \right) (\log R) F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} + O\left(\frac{F_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)$$

が成り立つ. ここで $F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)}$ は

$$F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} := \int_0^1 F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{m-1}}{\log R}, t_m, \frac{\log r_{m+1}}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R} \right) dt_m$$

で定義され, implicit constant は k のみに依存する.

Proof. 関数

$$\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{m-1}}{\log R}, x, \frac{\log r_{m+1}}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R} \right)$$

を導入する. すると, $r_m = 1$ なので Lemma B.2.9 に (B.3.9) と $0 \leq y_{\max} \leq F_{\max}$ を用いれば

$$y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} = \sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m, Wr)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)} \Phi\left(\frac{\log a_m}{\log R} \right) + O\left(\frac{F_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R \right) \quad (\text{B.3.22})$$

を得る. この右辺の和に Theorem A.6.2 を用いる. Theorem A.6.2 における乗法的関数 g としては

$$\frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \mathbb{1}_{(n, Wr)=1}$$

を用いればよい. 素数 p に対して

$$\frac{\mu(p)^2}{\varphi(p)} \mathbb{1}_{(p, Wr)=1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & (p \nmid Wr \text{ のとき}), \\ 0 & (p \mid Wr \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから, Theorem A.6.2 における γ は今

$$\gamma(p) = \begin{cases} 1 & (p \nmid Wr \text{ のとき}), \\ 0 & (p \mid Wr \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. この γ に対して仮定 (Γ_1) , (Γ_2) を確かめる. まず (Γ_1) は, 素数 p に対して

$$0 \leq \frac{\gamma(p)}{p} \leq \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1}{2}$$

だから $A_1 = 2$ で成立している. 次に, Mertens の定理 (Theorem A.5.1) より, $2 \leq w \leq z$ に対して

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\gamma(p) \log p}{p} \leq \sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} + O(1)$$

および

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\gamma(p) \log p}{p} = \sum_{\substack{w \leq p < z \\ p \nmid Wr}} \frac{\log p}{p} \geq \sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \mid Wr} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} - \sum_{p \mid Wr} \frac{\log p}{p} + O(1)$$

が得られるので, (Γ_2) は

$$\kappa = 1, \quad A_2 = O(1), \quad L = \sum_{p \mid Wr} \frac{\log p}{p} + O(1)$$

とともに成立している. この L は, Mertens の定理 (Theorem A.5.1) と仮定 $r < R$ より,

$$\begin{aligned} L &\leq \sum_{p \leq \log R} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p \mid Wr \\ p > \log R}} \frac{\log p}{p} + O(1) \ll \log \log R + \frac{1}{\log R} \sum_{p \mid Wr} \log p \\ &= \log \log R + \frac{1}{\log R} \log \left(\prod_{p \mid Wr} p \right) \\ &\leq \log \log R + \frac{1}{\log R} \log(WR) \ll \log \log R \ll \frac{1}{D_0} \log R \end{aligned}$$

と評価できる. さらに定数 c_g は今

$$c_g = \frac{1}{\Gamma(\kappa+1)} \prod_p \left(1 - \frac{\gamma(p)}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \prod_{p \mid Wr} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{\varphi(W)}{W} \left(\prod_{i=1}^r \frac{\varphi(r_i)}{r_i} \right) \leq \frac{\varphi(W)}{W}$$

という値を取る. よって, $0 \leq \Phi_{\max} \leq F_{\max}$ に注意して, Theorem A.6.2 より

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m, Wr)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)} \Phi\left(\frac{\log a_m}{\log R}\right) \\
&= \frac{\varphi(W)}{W} \left(\prod_{i=1}^r \frac{\varphi(r_i)}{r_i} \right) (\log R) \int_0^1 \Phi(t_m) dt_m + O\left(\frac{F_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R\right) \\
&= \frac{\varphi(W)}{W} \left(\prod_{i=1}^r \frac{\varphi(r_i)}{r_i} \right) (\log R) F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} + O\left(\frac{F_{\max}}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \log R\right)
\end{aligned}$$

を得る. あとはこれを (B.3.22) に代入すれば主張を得る. $\square$

Lemma B.3.4. (B.3.9) の下,

$$S_2^{(m)} = \frac{1}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \left(\frac{\log R}{\log N} \right) J_k^{(m)}(F) + O\left(\frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k \right)$$

が十分大の $N \geq N_0(\mathcal{H}, \delta)$ で成り立つ. ただしここで $J_k^{(m)}(F)$ は (B.1.7) で定義したように

$$J_k^{(m)}(F) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_k) dt_m \right)^2 dt_1 \cdots \widehat{dt_m} \cdots dt_k$$

で与えられ, implicit constant は $\mathcal{H}, \delta$ と (B.1.3) の implicit constant のみに依存する.

Proof. Lemma B.3.3 の状況の下,

$$\frac{\varphi(W)}{W} \left(\prod_{i=1}^r \frac{\varphi(r_i)}{r_i} \right) (\log R) F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} \leq F_{\max} \frac{\varphi(W)}{W} \log R$$

と実数 $A, B \geq 0$ に対して

$$(A + B)^2 = A + B(2A + B) = A + O(B(A + B))$$

であることを用いると, Lemma B.3.3 から

$$(y_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2 = \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^2 \left(\prod_{i=1}^k \frac{\varphi(r_i)}{r_i} \right)^2 (\log R)^2 (F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2 + O\left(\frac{F_{\max}^2}{D_0} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^2 (\log R)^2 \right) \quad (\text{B.3.23})$$

を得る. 一方, Lemma B.3.3 を直接評価して

$$y_{\max}^{(m)} \ll F_{\max} \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \quad (\text{B.3.24})$$

を得る. これら (B.3.23), (B.3.24) と $0 \leq y_{\max} \leq F_{\max}$ を Lemma B.2.8 に代入して

$$S_2^{(m)} = \frac{N}{W} \left(\frac{\log R}{\log N} \right) M + O\left(E + \frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}^2}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \right)^k N (\log R)^k + F_{\max}^2 N (\log N)^{-A} \right) \quad (\text{B.3.25})$$

ただし

$$M := \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_i, r_j)=1 \ (\forall i \neq j) \\ (r, W)=1 \\ r_m=1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right) (F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2,$$

$$E := \frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}}{W} \frac{\varphi(W)}{W} N (\log R) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_i, W)=1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{g(r_i)} \right)$$

を得る. この M と E をそれぞれ計算する.

まず, M を計算する. Lemma B.3.1 を用いたい. しかし, このためには

$$(r_i, r_j) = 1 \ (\forall i \neq j)$$

という異なる変数を跨る条件が邪魔なので取り除きたい. そこで,

$$M = \sum_1 - \sum_2 \tag{B.3.26}$$

ただし

$$\sum_1 := \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r, W)=1 \\ r_m=1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right) (F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2,$$

$$\sum_2 := \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_i, r_j) > 1 \ (\exists i \neq j) \\ (r, W)=1 \\ r_m=1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right) (F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2$$

と分解して, $\sum_1$ と $\sum_2$ をそれぞれ計算する.

まず, $\sum_1$ については, Lemma B.3.1 を用いる. Lemma B.3.1 における乗法的関数 g としては

$$\frac{\mu(n)^2 \varphi(n)^2}{g(n) n^2} \mathbb{1}_{(n, W)=1}$$

を用いればよい. この乗法的関数の素数 p における値は

$$\frac{\mu(p)^2 \varphi(p)^2}{g(p) p^2} \mathbb{1}_{(n, W)=1} = \begin{cases} \frac{(p-1)^2}{(p-2)p^2} & (p \nmid W \text{ のとき}), \\ 0 & (p \mid W \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. すると,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(p)}{p - \gamma(p)} = \frac{(p-1)^2}{(p-2)p^2} &\iff \gamma(p)(p-2)p^2 = p(p-1)^2 - \gamma(p)(p-1)^2 \\ &\iff \gamma(p)(p^3 - p^2 - 2p + 1) = p(p-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \gamma(p) &= \frac{p^3 - 2p^2 + p}{p^3 - p^2 - 2p + 1} \\ \Leftrightarrow \gamma(p) &= 1 - \frac{p^2 - 3p + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1}\end{aligned}$$

だから, Lemma B.3.1 における γ は今

$$\gamma(p) = \begin{cases} 1 - \frac{p^2 - 3p + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} & (p \nmid W \text{ のとき}), \\ 0 & (p \mid W \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. この γ に対して仮定 (Γ_1) , (Γ_2) を確かめる. まず (Γ_1) は, 素数 $p \geq 3$ に対して

$$\begin{aligned}p^2 - 3p + 1 &= p(p - 3) + 1 \geq 1 > 0, \\ p^3 - p^2 - 2p + 1 &\geq p^2(p - 3) + 1 \geq 1 > 0, \\ \frac{p^2 - 3p + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} &= \frac{p(p - 3) + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} \leq \frac{p^2(p - 3) + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} = \frac{p^3 - 3p^2 + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} \leq 1\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$0 \leq \frac{\gamma(p)}{p} \leq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p^2 - 3p + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} \right) \leq \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1}{2}$$

だから $D_0 \geq 2$ となるよう N が十分大であれば $A_1 = 2$ で成立している. 次に

$$1 - \frac{p^2 - 3p + 1}{p^3 - p^2 - 2p + 1} = 1 + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

であることに注意すれば, Mertens の定理 (Theorem A.5.1) より, $2 \leq w \leq z$ に対して

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\gamma(p) \log p}{p} \leq \sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p} + O\left(\sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p^2}\right) = \log \frac{z}{w} + O(1)$$

および

$$\begin{aligned}\sum_{w \leq p < z} \frac{\gamma(p) \log p}{p} &= \sum_{\substack{w \leq p < z \\ p > D_0}} \frac{\log p}{p} + O\left(\sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p^2}\right) \geq \sum_{w \leq p < z} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leq D_0} \frac{\log p}{p} + O(1) \\ &= \log \frac{z}{w} - \log D_0 + O(1)\end{aligned}$$

が得られるので, (Γ_2) は

$$\kappa = 1, \quad A_2 = O(1), \quad L = \log D_0 + O(1) \ll \log D_0 \ll \frac{1}{D_0} \log R$$

とともに成立している. さらに定数 c_g は今

$$c_g = \frac{1}{\Gamma(\kappa + 1)} \prod_p \left(1 - \frac{\gamma(p)}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{p|W} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p>D_0} \left(1 - \frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{\varphi(W)}{W} \prod_{p>D_0} \left(1 - \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{\varphi(W)}{W} \prod_{p>D_0} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \\
&= \frac{\varphi(W)}{W} \left(1 + O\left(\frac{1}{D_0}\right)\right)
\end{aligned}$$

という値を取る. 関数

$$\Psi: [0, 1]^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}; (t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) \mapsto \left(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \dots, t_k) dt_m \right)^2$$

を導入すれば, これは明らかに $\Psi \in \mathcal{S}_{k-1}^1$ を満たし,

$$(F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2 = \Psi \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{m-1}}{\log R}, \frac{\log r_{m+1}}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R} \right)$$

となる. また, $(t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) \in [0, 1]^{k-1}$ に対して,

$$|\Psi(t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k)| \leq F_{\max}^2$$

および $i \neq m$ のとき

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \Psi(t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k)}{\partial t_i} \right| &= 2 \left| \int_0^1 F(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \dots, t_k) dt_m \right| \\
&\quad \times \left| \int_0^1 \frac{\partial F(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \dots, t_k)}{\partial t_i} dt_m \right| \\
&\leq 2F_{\max}^2
\end{aligned}$$

を満たすので,

$$\Psi_{\max} \ll F_{\max}^2$$

である. よって, Lemma B.3.1 より

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \left(1 + O\left(\frac{1}{D_0}\right)\right) \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k \\
&\quad \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Psi(t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_k) dt_1 \cdots dt_{m-1} dt_{m+1} \cdots dt_k \\
&\quad + O\left(F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log D_0)(\log R)(\log R + \log D_0)^{k-2}\right) \\
&= \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k J_k^{(m)}(F) + O\left(\frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k\right)
\end{aligned} \tag{B.3.27}$$

が得られる.

次に, $\sum_2$ を評価する. まず, F の台が $\mathcal{R}_k \subseteq [0, 1]^k$ に含まれるから

$$\begin{aligned} \max(r_1, \dots, r_k) &\geq R \\ \implies F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)} &= \int_0^1 F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{m-1}}{\log R}, t_m, \frac{\log r_{m+1}}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right) dt_m = 0 \end{aligned}$$

であることを用いて

$$\sum_2 = \frac{\varphi(W)}{W}(\log R) \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_i, r_j) > 1 \ (\exists i \neq j) \\ (r_i, W) = 1 \ (\forall i) \\ r_m = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right) (F_{r_1, \dots, r_k}^{(m)})^2$$

と和の範囲を制限した後に, 条件 $(r_i, r_j) = 1$ を満たさない組 (i, j) に渡って分類して

$$\sum_2 \leq F_{\max}^2 \frac{\varphi(W)}{W}(\log R) \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0 \\ i_0, j_0 \neq m}} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ (r_{i_0}, r_{j_0}) > 1 \\ (r_i, W) = 1 \ (\forall i) \\ r_m = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right)$$

とできる. さらに, W の定義 (B.1.4) を思い出すと $(r_i, W) = 1$ から r_i の素因子はすべて D_0 以上であることがわかるので, $(r_{i_0}, r_{j_0}) > 1$ であれば, ある素数 $p \geq D_0$ が存在して $p \mid (r_{i_0}, r_{j_0})$ となることがわかる. この素因子 p で場合分けをすることで, さらに

$$\sum_2 \leq F_{\max}^2 \frac{\varphi(W)}{W}(\log R) \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0 \\ i_0, j_0 \neq m}} \sum_{p \geq D_0} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k < R \\ p \mid r_{i_0}, r_{j_0} \\ (r_i, W) = 1 \ (\forall i) \\ r_m = 1}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right)$$

とできる. すると右辺の和は各変数 $r_1, \dots, r_k$ ごとの和に分解できて

$$\begin{aligned} \sum_2 &\leq F_{\max}^2 \frac{\varphi(W)}{W}(\log R) \sum_{\substack{1 \leq i_0, j_0 \leq k \\ i_0 \neq j_0 \\ i_0, j_0 \neq m}} \sum_{p \geq D_0} \left(\sum_{\substack{r_{i_0} < R \\ p \mid r_{i_0} \\ (r_{i_0}, W) = 1}} \frac{\mu(r_{i_0})^2 \varphi(r_{i_0})^2}{g(r_{i_0}) r_{i_0}^2} \right) \left(\sum_{\substack{r_{j_0} < R \\ p \mid r_{j_0} \\ (r_{j_0}, W) = 1}} \frac{\mu(r_{j_0})^2 \varphi(r_{j_0})^2}{g(r_{j_0}) r_{j_0}^2} \right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0, j_0, m}}^k \left(\sum_{\substack{r_i < R \\ (r_i, W) = 1}} \frac{\mu(r_i)^2 \varphi(r_i)^2}{g(r_i) r_i^2} \right) \\ &\ll F_{\max}^2 \frac{\varphi(W)}{W}(\log R) \sum_{p \geq D_0} \left(\sum_{\substack{r < R \\ p \mid r \\ (r, W) = 1}} \frac{\mu(r)^2 \varphi(r)^2}{g(r) r^2} \right)^2 \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W) = 1}} \frac{\mu(r)^2 \varphi(r)^2}{g(r) r^2} \right)^{k-3} \end{aligned}$$

とできる. ここで平方無縁数に台を持つ乗法的関数 f に対して一般に不等式

$$f(mn) \leq f(m)f(n)$$

が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned} \sum_2 &\ll F_{\max}^2 \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \sum_{p \geq D_0} \frac{(p-1)^4}{(p-2)^2 p^4} \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2 \varphi(r)^2}{g(r) r^2} \right)^{k-1} \\ &\ll \frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2 \varphi(r)^2}{g(r) r^2} \right)^{k-1} \end{aligned} \quad (\text{B.3.28})$$

を得る. 最右辺の和には Corollary A.8.1 を

$$f(n) := \frac{\mu(n)^2 \varphi(n)^2}{g(n)n} \mathbb{1}_{n:\text{odd}} \rightsquigarrow \frac{f(n)}{n} = \frac{\mu(n)^2 \varphi(n)^2}{g(n)n^2} \mathbb{1}_{n:\text{odd}},$$

とともに用いる. すると, 奇素数 p に対して

$$f(p) = \frac{(p-1)^2}{(p-2)p} = 1 + \frac{1}{(p-2)p} = 1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

であるから $\kappa = 1$ と取れて

$$\begin{aligned} \prod_{p|W} \left(1 + \frac{f(p)}{p}\right)^{-1} &\leq \prod_{p|W} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq \prod_{p|W} \left(\frac{p-1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \\ &\leq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{\varphi(W)}{W} \ll \frac{\varphi(W)}{W} \end{aligned}$$

に注意すれば, 評価

$$\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2 \varphi(r)^2}{g(r) r^2} \ll \frac{\varphi(W)}{W} \log R$$

を得る. これを (B.3.28) に代入すれば

$$\sum_2 \ll \frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k \quad (\text{B.3.29})$$

を得る.

以上の (B.3.27) と (B.3.29) を (B.3.26) に代入すれば

$$M = \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k J_k^{(m)}(F) + O\left(\frac{1}{D_0} F_{\max}^2 \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k\right) \quad (\text{B.3.30})$$

を得る.

最後に残った E は, Lemma B.2.7 を用いれば

$$E \ll \frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}}{W} \frac{\varphi(W)}{W} N (\log R) \left(\sum_{\substack{r < R \\ (r, W)=1}} \frac{\mu(r)^2}{g(r)} \right)^{k-1} \ll \frac{1}{D_0} \frac{F_{\max}}{W} \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k N (\log R)^k \quad (\text{B.3.31})$$

と評価できる.

以上の (B.3.30) と (B.3.31) を (B.3.25) に代入して主張を得る. $\square$

(続きは準備中)

参考文献

- [1] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 74, Springer, 2000.
- [2] J. Maynard, *Small gaps between primes*, Ann. of Math. **181** (2015), 383–413.